AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Principio di uniforme limitatezza e applicazioni

Il prossimo argomento del corso riguarda un criterio di uniforme limitatezza per operatori lineari, che permetterà di dedurre la limitatezza (in norma) di una famiglia di operatori a partire dall'ipotesi, apparentemente molto più debole, di limitatezza puntuale. Questo criterio permetterà anche di dedurre condizioni sufficienti per la continuità di operatori lineari.
Per presentare questo risultato dimostriamo innanzi tutto un importante teorema di topologia generale. Introduciamo gli insiemi di prima categoria, un concetto di "magrezza" in topologia analogo a quello di misura nulla.

Definizione.
Un sottospazio $A \subset X$ di uno spazio metrico si dice ***di prima categoria*** *in X se è unione numerabile $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ di insiemi la cui chiusura ha interno $\overset{\circ}{\overline{A}}_n = \emptyset$ vuoto.*
Se A non è di prima categoria in X, A si dice ***di seconda categoria*** *in X.*
Uno spazio metrico di prima (o seconda) categoria in sé si dice semplicemente di prima (o seconda) categoria.

Osservazione.
La definizione di prima e seconda categoria può essere data, più in generale, per spazi topologici, dal momento che utilizza concetti esclusivamente topologici. Tuttavia, poiché considereremo solo spazi metrici, diamo la definizione solo per spazi metrici.

Esempio.

1. *$\mathbb{Q}$ è di prima categoria in sé e dunque è anche di prima categoria in $\mathbb{R}$, perché i punti sono chiusi con interno vuoto.*

2. *$\mathbb{Z}$ è di seconda categoria in sé, così come tutti gli spazi discreti, ma è di prima categoria in $\mathbb{Q}$ e dunque anche in $\mathbb{R}$.*

3. *$L^2([0,1])$ è di prima categoria in $L^1([0,1])$. Infatti, $L^2([0,1]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, con*

$$A_n := \left\{ f \in L^1([0,1]) : \int_0^1 f^2 \le n \right\},$$

è unione numerabile di chiusi (gli A_n lo sono per Fatou); inoltre, $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \overset{\circ}{A}_n = \emptyset$ perché se $f \in A_n$ e $g \in L^1([0,1]) \setminus L^2([0,1])$ allora $f_m := f + \frac{g}{m} \underset{m\to+\infty}{\to} f$ in $L^1([0,1])$ ma $f_m \notin A_n$.
Per lo stesso motivo, $L^q([0,1])$ è di prima categoria in $L^p([0,1])$ per ogni $p,q \in [1,+\infty]$ con $p < q$.

Il seguente teorema dimostra che gli spazi completi non sono "magri" in topologia.

Teorema (di Baire)**.**
Sia X uno spazio metrico completo.
Allora, per ogni successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di aperti densi, cioè tali che $\overline{A_n} = X$, anche l'intersezione è

densa, cioè $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = X$. *Equivalentemente, per ogni successione di chiusi* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di chiusi con interno* $\mathring{C}_n = \emptyset$ *vuoto, anche l'unione ha interno* $\overset{\circ}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} C_n = \emptyset$ *vuoto.*
In particolare, ogni spazio metrico completo è di seconda categoria in sé.

Dimostrazione.
Siano $\{A_n\}$ aperti densi e $B \subset X$ un aperto qualsiasi. Per la densità di A_1, $B \cap A_1 \neq \emptyset$ e inoltre, essendo aperto, $\overline{B_{\delta_1}(x_1)} \subset B \cap A_1$ per qualche $x_1 \in B$, $\delta_1 \leq 1$; analogamente, per la densità di A_2, $B_{\delta_1}(x_1) \cap A_2 \neq \emptyset$ e, poiché è aperto, $\overline{B_{\delta_2}(x_2)} \subset B_{\delta_1}(x_1) \cap A_2$ per qualche $x_2 \in B_{\delta_1}(x_1)$ e $\delta_2 \leq \dfrac{1}{2}$. Iterando, trovo $\delta_n \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right]$ e $x_n \in B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1})$ tali che $\overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1}) \cap A_n$.
Per costruzione, avremo $\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \delta_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per $m \geq n$, dunque $\{x_n\}$ è di Cauchy e, per completezza, $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \in X$; infine,

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset B \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

e dunque $B \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, quindi per l'arbitrarietà di B otteniamo che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ interseca qualsiasi aperto e cioè è denso. □

Osservazione.
Il Teorema di Baire è falso se si toglie l'ipotesi di completezza, come visto nell'esempio precedente con $X = \mathbb{Q}$.

Il Teorema di Baire ci permette di dimostrare uno dei teoremi più importanti di questo corso.

Teorema (di Banach-Steinhaus)**.**
Siano X *uno spazio di Banach,* Y *uno spazio normato e* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *una famiglia di operatori lineari tali che* $\sup_{\alpha\in I} \|A_\alpha x\|_Y < +\infty$ *per ogni* $x \in X$.
Allora, $\sup_{\alpha\in I} \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$.
La stessa conclusione segue assumendo semplicemente che esista $Y \subset X$ *di seconda categoria tale che* $\sup_{\alpha} \|A_\alpha x\|_Y < +\infty$ *per* $x \in B$.

Dimostrazione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$C_n := \{x \in X : \|A_\alpha x\| \leq n \;\forall\, \alpha \in I\} = \bigcap_{\alpha\in I} \{x \in X : \|A_\alpha x\| \leq n\} :$$

è chiuso, perché intersezione di chiusi, e inoltre per ipotesi

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in X : \sup_{\alpha} \|A_\alpha x\| \leq n\right\} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Dunque, dal Teorema di Baire, non tutti i C_n possono avere aperto vuoto, cioè $B_\delta(x_0) \subset C_{n_0}$ per qualche $x_0 \in X$, $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Dalla definizione di C_n, questo equivale a dire che $\|A_\alpha y\| \leq n_0$ per $y \in B_\delta(x_0)$, ovvero $\|A_\alpha(x_0 + \delta x)\| \leq n_0$ per $x \in B_1(0)$; di conseguenza, avremo $\|A_\alpha x\| \leq \dfrac{n_0 + \|A_\alpha x_0\|}{\delta}$, e cioè

$$\sup_{\alpha} \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{n_0 + \sup_\alpha \|A_\alpha x_0\|}{\delta} < +\infty.$$

Il secondo enunciato segue semplicemente considerando Y al posto di X. □

Osservazione.
Nel Teorema di Banach-Steinhaus la completezza di X è essenziale. Prendiamo infatti $X = c_{00}$ lo spazio delle successioni definitivamente nulle con la norma $\|\cdot\|_\infty$ e, per $n \in \mathbb{N}$, $L_n : X \to \mathbb{R}$ data da $L_n(c_1e_1 + \cdots + c_Ne_N) = nc_n$: è chiaramente lineare e continuo e inoltre $\sup_{n\in\mathbb{N}} |L_nx| < +\infty$ per ogni $x \in c_{00}$, ma $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{X^*} = \sup_{n\in\mathbb{N}} n = +\infty$.

Corollario.

1. *Se X è uno spazio di Banach e $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X^*$ sono tali che $\sup_\alpha |L_\alpha x| < +\infty$ per ogni $x \in X$, allora $\sup_\alpha \|L_\alpha\|_{X^*} < +\infty$.*
2. *Se X è uno spazio normato e $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ sono tali che $\sup_\alpha |Lx_\alpha| < +\infty$ per ogni $L \in X^*$, allora $\sup_\alpha \|x_\alpha\|_X < +\infty$; in questo caso non è necessario che X sia un Banach perché consideriamo l'immersione isometrica di X in X^{**}, che è un Banach.*

Esempio.

1. *Se $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset H$ è una famiglia di elementi di uno spazio di Hilbert tale che $\sup_\alpha |(x, y)| < +\infty$ per ogni $y \in H$, allora $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < +\infty$: basta applicare il Teorema di Banach-Steinhaus alla famiglia $\{L_\alpha\} \subset H^*$ data da $L_\alpha : y \mapsto (x_\alpha, y)$, che verifica $\|L_\alpha\|_{H^*} = \|x_\alpha\|$.*
2. *Se una successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ verifica $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)\right| < +\infty$ per ogni $y \in \ell_p$, per $p \in [1, +\infty]$, allora $x \in \ell_{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Consideriamo infatti, per $n \in \mathbb{N}$, il funzionale $L_n \in {\ell_p}^*$ dato da $L_n : y \mapsto \sum_{k=1}^{n} x(k)y(k)$: poiché $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k)\right| < +\infty$ per ogni $y \in \ell_p$, allora $\sup_{n\in\mathbb{N}} |L_ny| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} x(k)y(k)\right| < +\infty$. Dunque, dal Teorema di Banach-Steinhaus,*

$$\|x\|_{p'} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{{\ell_p}^*} < +\infty.$$

Osservazione.
Il Teorema di Banach-Steinhaus fornisce un'altra dimostrazione del fatto che $Y := \bigcup_{p>1} L^p([0, 1])$ è di prima categoria in $X = L^1([0, 1])$. Infatti, la successione $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* data da $L_nf = (\log n) \int_0^{\frac{1}{n}} f$ verifica, grazie alla disuguaglianza di Hölder, $|L_nf| \leq \frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{p}}} \|f\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $f \in Y$, e dunque è limitata puntualmente su Y. Tuttavia, $\{L_n\}$ non è limitata in norma perché $\|L_n\|_{X^*} = \log n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$; dunque, $Y \subset X$ non può essere di II categoria perché altrimenti contraddirebbe il Teorema di Banach-Steinhaus.

Proposizione.
Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{L}(X, Y)$ di operatori lineari tra uno spazio di Banach X e uno spazio normato Y tale che $A_nx \underset{n\to+\infty}{\to} A(x)$ per ogni $x \in X$.
Allora, $\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$ e inoltre la mappa limite $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ è lineare e continua con $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Dimostrazione.
Poiché $\{A_nx\}$ converge, è puntualmente limitata per ogni $x \in X$, dunque dal Teorema di Banach-Steinhaus otteniamo che $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ è limitato in norma. Quanto alla mappa limite, è lineare

perché per ogni $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha x + \beta y) \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Infine, la continuità e l'ultima disuguaglianza seguono da:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\le 1} \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\| = \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|.$$

$\square$

Osservazione.
Nella proposizione precedente può valere la disuguaglianza stretta $\|A\| < \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|$. *Infatti,* $L_n : \ell_2 \to \mathbb{R}$ *definita da* $L_n x = x(n)$ *verifica* $\|L_n\|_{\ell_2^*} = 1$ *ma* $L_n x \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ *per ogni* $x \in \ell_2$ *e dunque* $\|L\| = \|0\| = 0$.

Il Teorema di Banach-Steinhaus permette anche di dedurre un interessante risultato sulla convergenza delle serie di Fourier.

Proposizione.
Siano $C\left(\mathbb{S}^1\right)$ *lo spazio delle funzioni continue e periodiche su* $[-\pi, \pi]$*:*

$$C\left(\mathbb{S}^1\right) := \{f \in C([-\pi, \pi]) : \ f(\pi) = f(-\pi)\}$$

e, per $f \in C\left(\mathbb{S}^1\right)$, $S_N f$ *la somma parziale della serie di Fourier di* f*:*

$$S_N f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \qquad \begin{cases} a_n := \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t, \\ b_n := \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t. \end{cases}$$

Allora esiste $f \in C\left(\mathbb{S}^1\right)$ *per cui* $S_N f(0) \underset{N\to+\infty}{\not\to} f(0)$, *cioè la serie di Fourier di* f *<u>non</u> converge.*

Dimostrazione.
Innanzi tutto, utilizzando le proprietà dell'esponenziale complesso, possiamo scrivere

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\imath nt} \mathrm{d}t \right) e^{\imath nx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{\imath n(x-t)}}_{=:D_N(x-t)} \right) \mathrm{d}t.$$

In particolare, per $x = 0$, avremo $S_N f(0) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(-t)$, dunque $L_N : f \mapsto S_N f(0)$ è un funzionale lineare continuo su $C\left(\mathbb{S}^1\right)$.
Supponiamo per assurdo che $S_N f(0)$ converga per ogni $f \in C\left(\mathbb{S}^1\right)$; in particolare, $\sup_N \{S_N f(0)\} = \sup_N \{L_N f\} < +\infty$ per ogni f, e dunque per il Teorema di Banach-Steinhaus si avrà $\sup_N \|L_N\|_{C(\mathbb{S}^1)^*} = \sup_N \|D_N\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} < +\infty$. Questo tuttavia è assurdo: utilizzando infatti le proprietà della serie geometrica e dell'esponenziale complesso, possiamo scrivere $D_N(t) = D_N(-t) = \dfrac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$, da cui:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(-t)| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)\right|}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} \mathrm{d}t \ge \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)\right|}{|t|} \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin s|}{|s|} \mathrm{d}s \underset{N\to+\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

$\square$

Osservazione.
Parlando dei sistemi ortonormali sugli spazi di Hilbert, abbiamo visto che $S_N f \underset{N\to+\infty}{\to} f$ *in* $L^2([-\pi,\pi])$. *Questo risultato non è in contraddizione con quanto abbiamo appena visto, perché la convergenza in* L^2 *non implica quella puntuale, se non a meno di estratte e di insiemi di misura nulla.*

Definizione.
Sia $f \in C(X)$ *una funzione continua su uno spazio normato a valori reali.* f *si dice* ***Hölderiana*** *di esponente* $\alpha \in (0,1]$ *se esiste* $C > 0$ *tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|^{\alpha}, \qquad \forall x, y \in X.$$

Lo spazio delle funzioni Hölderiane su X *si indica con* $C^{0,\alpha}(X)$

Corollario.
Lo spazio delle funzioni Hölderiane

$$\bigcup_{0<\alpha\leq 1} C^{0,\alpha}\left(\mathbb{S}^1\right) := \bigcup_{0<\alpha\leq 1} \{f \in C^{0,\alpha}([-\pi,\pi]) : \ f(\pi) = f(-\pi)\}$$

è di prima categoria in quello delle funzioni continue $C\left(\mathbb{S}^1\right)$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, se $f \in C^{0,\alpha}\left(\mathbb{S}^1\right)$ per qualche $\alpha > 0$, allora $S_N f(0) \underset{N\to+\infty}{\to} f(0)$, per il Test del Dini, perché $\dfrac{|f(t) - f(0)|}{|t|} \leq \dfrac{C}{|t|^{1-\alpha}} \in L^1\left(\mathbb{S}^1\right)$.
Dunque, se lo spazio delle funzioni Hölderiane fosse di seconda categoria, avremmo trovato un insieme $C \subset C\left(\mathbb{S}^1\right)$ di seconda categoria per cui $L_N : f \mapsto S_N f(0)$ verifica $\sup\limits_N |L_N f| < +\infty$ per ogni $f \in B$, e dunque per il Teorema di Baire dovrei avere $\sup\limits_N \|L_N\| < +\infty$ che, come abbiamo visto in precedenza, è falso. □

Osservazione.
Un modo alternativo per vedere che le funzioni Hölderiane $\bigcup\limits_{0<\alpha\leq 1} C^{0,\alpha}\left(\mathbb{S}^1\right)$ *sono di prima categoria tra le funzioni continue* $C([0,1])$ *è scriverle come unione numerabile* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *dei chiusi*

$$A_n := \left\{f \in C\left(\mathbb{S}^1\right) : \ |f(x) - f(y)| \leq n|x - y|^{\frac{1}{n}}, \ \forall\, x, y \in \mathbb{S}^1\right\};$$

la dimostrazione che $\mathring{A}_n = \emptyset$ *è analoga al caso, già visto, di* $L^q \subset L^p$.

Utilizzando il Teorema di Baire si può dimostrare una proprietà importante che caratterizza gli operatori lineari.

Teorema (della mappa aperta)**.**
Siano X, Y *spazi di Banach e* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *suriettivo.*
Allora, A *è aperto, cioè* $A(Z) \subset Y$ *è aperto per ogni* $Z \subset X$ *aperto.*

Dimostrazione.

Passo 1 Per qualche $\delta > 0$ vale $B_{2\delta}(0) \subset \overline{A(B_1(0))}$. Infatti, per la suriettività di A, possiamo scrivere $Y = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A(B_n(0))}$, che è un'unione numerabile di chiusi; dunque, dal Teorema di Baire, almeno uno avrà interno non vuoto, cioè $B_{4n_0\delta}(ny_0) \subset \overline{A(B_{n_0}(0))}$ per qualche $\delta > 0$, $y_0 \in Y$, ovvero $B_{4\delta}(y_0) \subset \overline{A(B_1(0))}$. Per simmetria avremo anche $B_{4\delta}(-y_0) \subset \overline{A(B_1(0))}$, dunque

$$B_{2\delta}(0) = \frac{1}{2}B_{4\delta}(0) = \frac{1}{2}B_{4\delta}(y_0) + \frac{1}{2}B_{4\delta}(-y_0) \subset \frac{1}{2}\overline{A(B_1(0))} + \frac{1}{2}\overline{A(B_1(0))} = \overline{A(B_1(0))},$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla convessità di $\overline{A(B_1(0))}$.

Passo 2 Vale anche $B_\delta(0) \subset A(B_1(0))$. Fissato $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$, cerco $x \in X$ con $\|x\| < 1$ e $Ax = y$: dal passo precedente, $B_\delta(0) \subset \overline{A\left(B_{\frac{1}{2}}(0)\right)}$, dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X$ tale che $\|x_\varepsilon\| < \frac{1}{2}$ e $\|y - Ax_\varepsilon\| < \varepsilon$, e in particolare, trovo x_1 con $\|x_1\| < \frac{1}{2}$ e $\|y - Ax_1\| < \frac{\delta}{2}$. Inoltre, poiché $y - Ax_1 \in B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subset \overline{A\left(B_{\frac{1}{4}}(0)\right)}$, allora come prima posso trovare x_2 con $\|x_2\| < \frac{1}{4}$ e $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{\delta}{4}$; iterando, per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovo x_n con

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n} \qquad\qquad \|y - A(x_1 + \cdots + x_n)\| \leq \frac{\delta}{2^n}.$$

La successione $\widetilde{x}_n = x_1 + \cdots + x_n$ è di Cauchy, in quanto

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$$

e dunque, essendo X completo, convergerà a $x \in X$, mentre per continuità di A abbiamo

$$\|y - Ax\| = \lim_{n\to+\infty} \|y - A\widetilde{x}_n\| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\delta}{2^n} = 0.$$

Passo 3 Conclusione: per ogni aperto $Z \subset X$, prendo $y_0 = Ax_0 \in A(Z)$ e $r > 0$ tale che $x_0 + B_r(0) \subset Z$; per linearità avremo $y_0 + A(B_r(0)) = A(B_r(x_0)) \subset A(Z)$, ma dal passo precedente sappiamo che, per omogeneità, $B_{\delta r}(0) \subset A(B_r(0))$, e dunque

$$B_{\delta r}(y_0) = y_0 + B_{\delta r}(0) \subset y_0 + A(B_r(0)) \subset A(Z).$$

Pertanto, y_0 è interno a $A(Z)$ e quindi $A(Z)$ è aperto.

□

Osservazione.

1. *Il Teorema della mappa aperta è falso per mappe non lineari: ad esempio $f(x) = x^3 - x$ è continua e suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ma non è aperta perché ad esempio $f(0, +\infty) = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ non è aperto in $\mathbb{R}$.*

2. *Il Teorema della mappa aperta è falso per qualsiasi mappa lineare non suriettiva, perché $A(X) = \operatorname{ran} A$ non è aperto, ma anzi ha interno vuoto: se per assurdo $B_\delta(y_0) \subset A(X)$ per qualche $\delta > 0, y_0 \in Y$, allora per linearità avrei $B_R(y_0) \subset A(X)$ per ogni $R > 0$, cioè $A(X) = Y$.*

Corollario.

1. *Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ è una mappa <u>invertibile</u> tra due spazi di Banach X, Y, allora $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ è continua.*

2. *Siano $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ due norme su uno spazio vettoriale X tali che X è completo rispetto a <u>entrambe</u> le norme. Se esiste $C > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ per ogni $x \in X$, allora esiste $\widetilde{C} > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$ per ogni $x \in X$, ovvero le due norme si equivalgono.*

Dimostrazione.

1. La linearità di A^{-1} è ovvia, dunque basta dimostrare la continuità. Dal Teorema della mappa aperta sappiamo che $B_\delta(0) \subset A(B_1(0))$ per qualche $\delta > 0$, ma essendo A invertibile questo vuol dire $A^{-1}(B_\delta(0)) \subset B_1(0)$; in altri termini, $\sup_{\|y\|\leq\delta} \left\|A^{-1}y\right\| \leq 1$, ovvero $\left\|A^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{\delta} < +\infty$.

2. Considero la mappa identità su X con le due norme distinte

$$\begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_1) & \xrightarrow{A} & (X, \|\cdot\|_2) \\ x & \to & x. \end{array}$$

Per ipotesi abbiamo $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$, dunque A è continua; quindi, per il corollario precedente, sarà continua anche la sua inversa

$$\begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_2) & \xrightarrow{A^{-1}} & (X, \|\cdot\|_1) \\ x & \to & x, \end{array}$$

cioè esisterà $C > 0$ tale che $\|x\|_1 = \left\|A^{-1}x\right\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$.

□

Osservazione.
Nella prima parte del corso abbiamo già visto delle mappe lineari continue con inversa discontinua e anche delle norme per cui valeva una sola delle due disuguaglianze che danno l'equivalenza. Tuttavia, in tutti questi casi, gli spazi non sono completi.

Dal Teorema della mappa aperta si deduce un importante criterio di continuità per mappe lineari.

Teorema (del grafico chiuso)**.**
Sia $A : X \to Y$ una mappa lineare tra due spazi di Banach X, Y tale che il suo grafico

$$G_A := \{(x, y) \in X \times Y : \ y = Ax\}$$

è chiuso in $X \times Y$.
Allora, A è continua.

Dimostrazione.
Per ipotesi, $G_A \lhd X \times Y$ e dunque è uno spazio di Banach con la norma indotta $\|(x, Ax)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$. La proiezione

$$\begin{array}{ccc} G_A & \xrightarrow{\Pi} & X \\ (x, Ax) & \to & x. \end{array}$$

è una mappa lineare, continua e invertibile; quindi, dal corollario precedente, anche Π^{-1} è continua, cioè esiste $C > 0$ tale che, per ogni $x \in X$,

$$\|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|(x, Ax)\|_{X\times Y} = \left\|\Pi^{-1}(x, Ax)\right\|_{G_A} \leq C\|x\|_X.$$

Pertanto, $\|Ax\| \leq (C - 1)\|x\|$ e cioè A è continua. □

Osservazione.

1. *L'enunciato del Teorema del grafico chiuso equivale a dire che, se per ogni $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ che verifica $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ vale $y = Ax$, allora A è continua. Senza questo teorema, per verificare la continuità di un operatore, bisognerebbe verificare che per ogni successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ deve valere $Ax_n \underset{n\to+\infty}{A} x$, non solo per le successioni per cui A_n converge.*

2. *L'implicazione inversa del Teorema del grafico chiuso è sempre vera, perché se $F : X \to Y$ è continua, allora*
$$G_F := \{(x, y) \in X \times Y : \ y - F(x) = 0\}$$
è chiuso in quanto $(x, y) \mapsto y - F(x)$ è continua.

3. *Il Teorema del grafico chiuso è falso per mappe non lineari: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è discontinua ma G_f è chiuso.*

4. *Una mappa lineare continua con grafico chiuso può* <u>*non*</u> *essere una mappa chiusa, cioè che manda insiemi chiusi in insiemi chiusi, come vedremo spesso in seguito: ad esempio, la mappa* $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ *data da* $Af(x) = \int_0^x f$ *non è chiusa, perché* $\operatorname{ran} A = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$ <u>*non*</u> *è chiuso.*

Corollario.
Se $A : X \to X^*$ *è una mappa lineare tra uno spazio di Banach* X *e il suo duale* X^* *verifica una delle seguenti:*

$$\begin{aligned} (Ax)y = (Ay)x \quad &\forall\, x, y \in X \quad \textit{(Simmetria)} \\ (Ax)x \geq 0 \quad &\forall\, x \in X \quad \textit{(Non negatività)}; \end{aligned}$$

allora A *è continua.*

Dimostrazione.
Supponiamo che A sia simmetrico, e mostriamo la continuità utilizzando il Teorema del grafico chiuso: prendiamo $x_n \in X$ tale che $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0 \in X$ e $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} L_0 \in X^*$. Allora, per ogni $x \in X$,

$$L_0 x \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} (Ax_n)x = (Ax)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} (Ax)x_0 = (Ax_0)x;$$

dunque $L_0 = Ax_0 \in G_A$ e quindi A è continua.
Supponiamo invece che A sia non-negativo e facciamo vedere che è continuo applicando nuovamente il Teorema del grafico chiuso: se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$ e $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} L_0$, allora per ogni $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq (A(x_n - x_0 - \lambda x))(x_n - x_0 - \lambda x) \underset{n\to+\infty}{\to} (L_0 - Ax_0 - \lambda Ax)(-\lambda x) = -\lambda(L_0 - Ax_0)x + \lambda^2(Ax)x;$$

ovvero $\lambda(L_0 - Ax_0)x \leq \lambda^2(Ax)x$. Dividendo per λ otteniamo

$$\begin{cases} (L_0 - Ax_0)x \leq \lambda(Ax)x \underset{\lambda\to0^+}{\to} 0 & \text{se } \lambda > 0 \\ (L_0 - Ax_0)x \geq \lambda(Ax)x \underset{\lambda\to0^-}{\to} 0 & \text{se } \lambda < 0, \end{cases}$$

quindi $L_0 x = (Ax_0)x$ per ogni $x \in X$ e cioè $L_0 = Ax_0$. □

Osservazione.
Alla luce del Teorema di Riesz-Fréchet, il precedente corollario permette di dimostrare la continuità per una mappa lineare $A : H \to H$ *da uno spazio di Hilbert* H *in sé che verifichi*

$$(Ax, y) = (Ay, x) \quad \forall\, x, y \in X \qquad \textit{oppure} \qquad (Ax, x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Applichiamo ora questi risultati per parlare di <u>complementare</u> di un sottospazio lineare chiuso, operazione che abbiamo già visto su spazi di Hilbert e che proveremo a estendere più in generale.

Definizione.
Sia X *uno spazio di Banach e* $E \lhd X$ *un suo sottospazio lineare chiuso.*
Un sottospazio lineare chiuso $F \lhd X$ *si dice* ***complementare*** *di* E *in* X *se:*

$$E + F = X \qquad\qquad E \cap F = \{0\}.$$

Se F *è un complementare di* E*, scriveremo* $E \oplus F = X$.

Osservazione.

1. *La relazione di complementarietà è simmetrica:* E *è un complementare di* F *se e solo se* F *è un complementare di* E.

2. *Il fatto che* E *e* F *siano complementari equivale a richiedere che ogni elemento* $x \in X$ *si scriva in modo unico come somma* $x = y + z$ *di un elemento* $y \in E$ *e di un* $z \in F$.

Esempio.

1. *Se H è uno spazio di Hilbert e $E \lhd H$, allora $E^{\perp}$ è un complementare di E.*

2. *Nello spazio prodotto $X \times Y$ di due spazi di Banach X, Y, un complementare di $X \times \{0\} \lhd X \times Y$ è dato da $\{0\} \times Y$.*

3. *Se c è lo spazio delle successioni $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che hanno limite $\lim\limits_{k \to +\infty} x(k)$ finito, munito della norma $\| \cdot \|_{\ell_\infty}$, e $c_0 \lhd c$ è lo spazio delle successioni infinitesime, allora un complementare di c_0 in c è dato dalle successioni costanti*

$$F := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \; x(k) \equiv x_0, \; \forall \, k \in \mathbb{N}\}.$$

Proposizione.
Un sottospazio lineare chiuso $E \lhd X$ di uno spazio di Banach X ha un complementare se e solo se esiste una proiezione suriettiva $P \in \mathcal{L}(X, E)$ tale che $Px = x$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione.
Supponiamo che E abbia un complementare F. Allora, potremo scrivere ogni $x \in X$ in modo unico come $x = x_E + x_F$ con $x_E \in E$, $x_F \in F$; dunque possiamo definire $Px = x_E$. P è lineare perché

$$(\alpha x + \beta y)_E + (\alpha x + \beta y)_F = \alpha x + \beta y = \alpha(x_E + x_F) + \beta(y_E + y_F) = (\alpha x_E + \beta y_E) + (\alpha x_F + \beta y_F),$$

per ogni $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dunque poiché $E \cap F = \{0\}$ avremo

$$(\alpha x + \beta y)_E = \alpha x_E + \beta y_E \qquad\qquad (\alpha x + \beta y)_F = \alpha x_F + \beta y_F.$$

Per dimostrare la continuità usiamo il Teorema del grafico chiuso: se $(x_n, Px_n) \underset{n \to +\infty}{\to} (x, y) \in X \times E$, allora $F \ni x_n - Px_n \underset{n \to +\infty}{\to} x - y$, ma essendo F chiuso avremo $x - y \in F$; dunque potremo scrivere $x = y + (x - y) = Px + (x - Px) \in E \oplus F$, ma poiché la scrittura è unica dovremo avere $y = Px$, dunque G_P è chiuso e P è continua. Infine, dalla costruzione di P segue che $Px = x$ per $x \in E$ e in particolare P è suriettiva.
Viceversa, supponiamo che esista una proiezione $P \in \mathcal{L}(X, E)$ tale che $P^2 = P$. Allora, pongo

$$F := \operatorname{ran}\,(\mathbb{I} - P) = \{x - Px : \; x \in E\}.$$

Innanzi tutto, F è un sottospazio lineare perché P è lineare; inoltre, $E + F = X$ perché posso scrivere ogni $x \in X$ come $x = Px + x - Px \in E + F$. Mostriamo ora che $E \cap F = \{0\}$: se $z = Px = y - Py \in E \cap F$, allora $P(x + y) = y \in E$, dunque $Py = y$ e cioè $z = Px = y - Py = 0$.
Infine, facciamo vedere che F è chiuso: se $y_n = x_n - Px_n \underset{n \to +\infty}{\to} y_0 \in F$, allora

$$y_0 \underset{n \to +\infty}{\leftarrow} x_n - Px_n = x_n - Px_n + Px_n - P^2 x_n = y_n - Py_n \underset{n \to +\infty}{\to} y_0 - Py_0,$$

dunque $y_0 \in \operatorname{ran}\,(\mathbb{I} - P) = F$ e quindi F è chiuso. □

Osservazione.
Se $E \lhd X$ ha F per complementare e $P \in \mathcal{L}(X, E)$ è la proiezione su E, la proiezione su F (che esiste perché E è un complementare per F) è data da $x \mapsto x - Px$.

Esempio.

1. *Se X è uno spazio di Hilbert, abbiamo già visto che tutti i suoi sottospazi $E \lhd X$ hanno come complementare l'ortogonale ed esiste anche una proiezione.*

2. *Sullo spazio prodotto $X \times Y$ le proiezione su $X \times \{0\}$ e $\{0\} \times Y$ sono date rispettivamente da $P(x, y) = (x, 0)$ e $P(x, y) = (0, y)$.*

3. *Prendendo c, c_0 come prima, la proiezione $P : c \to c_0$ è data da $Px(k) = x(k) - \lim\limits_{j \to +\infty} x(j)$, mentre la proiezione $P : c \to F$ sullo spazio delle successioni costanti è dato da $Px(k) = \lim\limits_{j \to +\infty} x(j)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Proposizione.
Sia X uno spazio di Banach e $E \lhd X$ un suo sottospazio finito dimensionale. Allora, E ha un complementare in X.

Dimostrazione.
Sia $\{e_1, \ldots, e_N\}$ una base di E e $\{L_1, \ldots, L_N\} \subset E^*$ la sua base duale, cioè tale che $L_i e_j = \delta_{ij}$, e siano $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_N \in X^*$ le rispettive estensioni ottenute con il Teorema di Hahn-Banach; allora, $Px := \left(\widetilde{L}_1 x\right) e_1 + \cdots + \left(\widetilde{L}_N x\right) e_N$ è una proiezione su E: è lineare e continua perché lo sono le $\widetilde{L}_i$, e inoltre se $x = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N$ allora

$$Px = x_1 P e_1 + \cdots + x_N P e_N = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N = x.$$

Dunque, applicando la proposizione precedente, concludiamo che E ha un complementare.

□

Osservazione.
Come abbiamo visto negli spazi di Hilbert, nessuna di queste condizioni è necessaria per l'esistenza di un complementare.

Esempio.
Nell'esempio precedente con $c_0 \lhd c$ è verificata la seconda condizione, perché $\dim \frac{c}{c_0} = \dim F = 1$.

Teorema (Caratterizzazione delle mappe suriettive e iniettive)**.**
Siano X, Y spazi di Banach.

1. *Una mappa lineare continua suriettiva $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ha un inverso destro continuo se e solo se* $\ker A$ *è complementato in X.*

2. *Una mappa lineare continua iniettiva $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ha un inverso sinistro continuo se e solo se* $\operatorname{ran} A$ *è chiuso e complementato in Y.*

Dimostrazione.

1. Supponiamo che esista un inverso destro $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ di A tale che $A \circ B = \mathbb{I}_Y$. Allora, $\operatorname{ran} B$ è un complementare di $\ker A$: ovviamente è un sottospazio lineare, inoltre è chiuso perché se $By_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \in X$, allora

   $$x \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} By_n = B(ABy_n) \underset{n\to+\infty}{\to} B(Ax),$$

   dunque $x = B(Ax) \in \operatorname{ran} B$. Per mostrare $\ker A + \operatorname{ran} B = X$, per ogni $x \in X$ scriviamo $x = (x - B(Ax)) + B(Ax) \in \ker A + \operatorname{ran} B$, in quanto

   $$A(x - B(Ax)) = Ax - (AB)(Ax) = Ax - Ax = 0.$$

   Infine, $\ker A \cap \operatorname{ran} B = \{0\}$ perché se $x \in \ker A \cap \operatorname{ran} B$, allora $Ax = 0$, $x = By$, e dunque

   $$x = By = B(ABy) = B(Ax) = B0 = 0.$$

   Viceversa, supponiamo $X = \ker A \oplus F$ per qualche $F \lhd X$. Dalla proposizione precedente so che esiste una proiezione $P \in \mathcal{L}(X, F)$, e definisco $By := P\left(A^{-1}\{y\}\right)$, dove $A^{-1}\{y\}$ è un qualsiasi $x \in X$ tale che $Ax = y$: B non dipende dalla scelta di x perché se $Ax = Ax' = y$ allora $x - x' \in \ker A$ e cioè $Px - Px' = P(x - x') = 0$. Mostro ora che B è un inverso destro di A: dato $y \in Y$, per la suriettività di A esisterà $x \in X$ tale che $Lx = y$; scrivendo $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \ker A$, $x_2 \in F$, avremo $Px = x_2$ e cioè

   $$ABy = A(Px) = Ax_2 = Ax = y.$$

   Infine, B è continua per il Teorema del grafico chiuso: se $(y_n, By_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (y, x) \in Y \times F$, allora $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} ABy_n = Ax$ e dunque

   $$By = B(Ax) = P\left(A^{-1}(Ax)\right) = Px = x.$$

2. Supponiamo che esista $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tale che $B \circ A = \mathbb{I}_X$. Innanzi tutto, ran A è chiuso, perché se $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ allora

$$y \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} Ax_n = A(BAx_n) \underset{n\to+\infty}{\to} ABy \in \operatorname{ran} A.$$

Mostriamo che $\ker B$ è un complementare di ran A: ovviamente $\ker B \lhd Y$; inoltre, $Y = \operatorname{ran} A + \ker B$ perché possiamo scrivere $y = (AB)y + (y - (AB)y) \in \operatorname{ran} A + \ker B$, essendo

$$B(y - (AB)y) = By - (BA)By = By - By = 0.$$

Infine, se $y \in \operatorname{ran} A \cap \ker B$, allora $y = Ax$, $By = 0$ e dunque

$$y = Ax = A(BAx) = A(By) = A0 = 0.$$

Viceversa, supponiamo $Y = \operatorname{ran} A \oplus F$. Detta $P : Y \to \operatorname{ran} A$ la proiezione, pongo $By := A^{-1}(Py)$: è ben definito per l'iniettività di A; inoltre, $B \circ A = \mathbb{I}_X$ perché dalle proprietà di P abbiamo $P(Ax) = Ax$ e dunque

$$BAx = A^{-1}(PAx) = A^{-1}(Ax) = x.$$

Infine, B è continua perché P è continua e lo è anche A^{-1}, in quanto inversa di una mappa invertibile tra gli spazi di Banach X e ran A.

□

Osservazione.
Mettendo insieme i due risultati del teorema, otteniamo che una mappa lineare continua invertibile ha inverso destro continuo se e solo se $\ker A = \{0\}$ *e* $\operatorname{ran} A = Y$ *sono complementati. Questo è banalmente vero perché* X *è un complementare di* $\{0\}$ *e* $\{0\}$ *è un complementare di* Y*; dunque otteniamo che ogni mappa lineare continua invertibile ha inversa continua, cosa che già sapevamo dal Teorema della mappa aperta.*

Esempio.
La mappa $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ *definita da* $(Ax)(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ *è iniettiva, ma non ha un inverso sinistro continuo: infatti, se esistesse* $B : \operatorname{ran} A \to \ell_2$ *tale che* $B \circ A = \mathbb{I}_{\ell_2}$*, dovrebbe essere tale che* $(By)(k) = ky(k)$ *per ogni* $y \in \operatorname{ran} A$*, dunque prendendo* $y = e_n = A(ne_n) \in \operatorname{ran} A$ *otteniamo*

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_2)} \geq \|Be_n\| = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Infatti, ran A *non è chiuso in* ℓ_2*, ma anzi ne è un sottospazio denso proprio.* $\operatorname{ran} A \subsetneq \ell_2$ *perché* $y = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\right) \in \ell_2 \setminus \operatorname{ran} A$ *perché se* $Ax = y$ *allora* $x(k) = 1$ *per ogni* k *e quindi* $x \notin \ell_2$*.*
Del resto, ran A *è denso perché contiene lo spazio delle successioni definitivamente nulle* c_{00}*: se* $y \in c_{00}$*, allora* $y = Ax$ *per* $x \in c_{00} \subset \ell_2$ *dato da* $x(k) = ky(k)$*.*

Per concludere il capitolo sui complementari, mostriamo un esempio di sottospazio che non ammette complementare. Per illustrare l'esempio avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma.
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* ℓ_1 *tale che* $Lx_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *per ogni* $L \in (\ell_1)^*$ *o, equivalentemente,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *per ogni* $y \in \ell_\infty$*.*
Allora, $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *in* ℓ_1*.*

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che $\|x_n\| \geq \delta > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, poiché $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |x_1(k)| < +\infty$, esiste

$K_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\displaystyle\sum_{k=K_1+1}^{+\infty} |x_1(k)| \leq \frac{\delta}{5}$; inoltre, scegliendo $y = e_k \in \ell_\infty$ otteniamo che $x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni k e quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{K_1} |x_n(k)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, e per $n = n_2$ sufficientemente grande sarà più piccolo di $\dfrac{\delta}{5}$. Fissato n_2, trovo K_2 per cui $\displaystyle\sum_{k=K_2+1}^{+\infty} |x_{n_2}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$ e itero il procedimento: esisteranno $n_1 = 1 < n_2 < \dots n_j < \dots$ e $K_1 < K_2 < \dots < K_j < \dots$ tali che

$$\sum_{k=1}^{K_{j-1}} \left|x_{n_j}(k)\right| \leq \frac{\delta}{5}, \qquad \sum_{k=K_j+1}^{+\infty} \left|x_{n_j}(k)\right| \leq \frac{\delta}{5}.$$

A questo punto considero $y \in \ell_\infty$ data da $y(k) = \text{segno}\big(x_{n_j}(k)\big)$ se $K_{j-1}+1 \leq k \leq K_j$ e otterrò:

$$\begin{aligned}
0 \underset{j\to+\infty}{\leftarrow} & \left|\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_j}(k)y(k)\right| \\
\geq & \left|\sum_{k=K_{j-1}+1}^{K_j} x_{n_j}(k)y(k)\right| - \left|\sum_{k=1}^{K_{j-1}} x_{n_j}(k)y(k)\right| - \left|\sum_{k=K_j+1}^{+\infty} x_{n_j}(k)y(k)\right| \\
\geq & \sum_{k=K_{j-1}+1}^{K_j} \left|x_{n_j}(k)\right| - \sum_{k=1}^{K_{j-1}} \left|x_{n_j}(k)\right| - \sum_{k=K_j+1}^{+\infty} \left|x_{n_j}(k)\right| \\
= & \sum_{k=1}^{+\infty} \left|x_{n_j}(k)\right| - 2\sum_{k=1}^{K_{j-1}} \left|x_{n_j}(k)\right| - 2\sum_{k=K_j+1}^{+\infty} \left|x_{n_j}(k)\right| \\
\geq & \frac{\delta}{5};
\end{aligned}$$

che è assurdo. □

Esempio.
Si possono costruire delle mappe suriettive che non hanno inverso destro continuo, e dunque il cui nucleo non avrà complementare: consideriamo, dato un sottoinsieme denso e numerabile $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nella palla unità di ℓ_2, la mappa

$$\begin{aligned}
\ell_1 &\xrightarrow{A} \ell_2 \\
x &\to \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x(n) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1)x(n), \dots, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)x(n), \dots\right).
\end{aligned}$$

A è ben definita e continua perché

$$\|Ax\|_2 = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x(n)\right\|_2 \leq \|a_n\|_2 \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)| \leq \|x\|;$$

inoltre, la linearità si verifica immediatamente.
La suriettività può essere dimostrata considerando equivalentemente, per omogeneità, solo la palla unità di ℓ_2: dato $y \in \ell_2$ con $\|y\| \leq 1$, per densità esiste a_{n_1} tale che $\|y - a_{n_1}\| \leq \dfrac{1}{2}$; analogamente, essendo $\left\{\dfrac{a_n}{2}\right\}$ densa in $B_{\frac{1}{2}}(0)$, esisterà a_{n_2} tale che $\left\|y - a_{n_1} - \dfrac{a_{n_2}}{2}\right\| \leq \dfrac{1}{4}$, e iterando troverò a_{n_j} per cui $\left\|y - a_{n_1} - \dots - \dfrac{a_{n_j}}{2^j}\right\| \leq \dfrac{1}{2^{j+1}}$. Dunque, passando al limite, avrò $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{n_j}}{2^j}$, ma poiché $a_n = Ae_n$, allora $y = A\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e_{n_j}}{2^j}\right)$, e quindi essendo y arbitrario A sarà suriettiva.

Supponiamo ora che esista $B \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_1)$ *tale che* $A \circ B = \mathbb{I}_{\ell_2}$. *Preso comunque* $y \in \ell_\infty$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (Bx)(k)y(k)$ *è un funzionale lineare continuo su* ℓ_2, *dunque* $\sum_{k=1}^{+\infty} (Bx)(k)y(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)z(k)$ *per ogni* $x \in \ell_2$, *per qualche* $z \in \ell_2 \subset c_0$; *scegliendo* $x = e_n$ *avremo*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (Be_n)(k)y(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_n(k)z(k) = z(n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Dal lemma precedente, ciò equivale a dire che $Be_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ *in* ℓ_1, *ma questo porta alla contraddizione:*

$$\|e_n\| = \|ABe_n\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\ell_1, \ell_2)} \|Be_n\|_{\ell_1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$