AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Spazi di Sobolev

Introduciamo ora una nuova classe di spazi funzionali in cui si riesca a definire a generalizzare il concetto di derivata, chiamato ora derivata debole. L'idea di base è di estendere la nozione di derivata a tutte le funzioni per cui vale la formula di integrazione per parti.
L'utilità di questi spazi, noti come spazi di Sobolev, segue dal fatto che sono particolarmente convenienti per lo studio delle equazioni differenziali.

Definizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $a < b$ e sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$.
Si dice che u ***ha una derivata debole*** *su (a,b) se esiste $g \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ tale che*

$$\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g\varphi \qquad\qquad \forall\, \varphi \in C_0^1((a,b)).$$

g si dice la ***derivata debole*** *di u e si indica con il simbolo usuale di derivazione $u' = g$.*

Esempio.

1. *Ogni funzione u derivabile su (a,b) ha una derivata debole su (a,b) e la sua derivata debole coincide con quella ben nota; questo segue dalla formula di integrazione per parti.*

2. *La funzione $u(x) = |x|$, pur non essendo derivabile in senso classico su $\mathbb{R}$, lo è in senso debole perché per $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$ abbiamo*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} u\varphi' &= -\int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} x\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= [-x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x + [x\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi g,
\end{aligned}$$

con $g(x) = \mathrm{segno}(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$. Analogamente, hanno derivate deboli le funzioni non derivabili:

$$x^+ = \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}, \qquad\qquad x^- = \max\{-x, 0\} = x - x^+ = \frac{|x| - x}{2};$$

e vale

$$\left(x^+\right)' = \chi_{(0,+\infty)}, \qquad\qquad \left(x^-\right)' = \chi_{(-\infty,0)}.$$

3. *La funzione $u(x) = \mathrm{segno}(x)$ non ha una derivata debole su nessun (a,b) con $a < 0 < b$. Infatti, se lo fosse avremmo, per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$,*

$$-\int_a^b u'\varphi = \int_a^b u\varphi' = -\int_a^0 \varphi' + \int_0^b \varphi' = -\varphi(0) + \varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(0) = -2\varphi(0),$$

che è impossibile.

Osservazione.

1. *La derivata debole è* unica, *perché se* $\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g_1\varphi = -\int_a^b g_2\varphi$ *per ogni* $\varphi \in C_0^1([a,b])$, *allora* $\int_a^b \varphi(g_1 - g_2) \equiv 0$ *e dunque, per densità, scegliendo una successione* $\{\varphi_n\}$ *che approssima* $\operatorname{segno}(g_1 - g_2)$ *si ottiene* $g_1 \equiv g_2$.
2. *Se* $u \equiv v$ *q.o. su* (a,b), *allora* u *ha una derivata debole se solo se ce l'ha* v, *e in caso affermativo* $u' = v'$.
3. *Valgono le ben note regole di derivazione: se* f, g *hanno derivate deboli, allora lo sono anche la loro somma e il prodotto con* $(f+g)' = f' + g'$ *e, se una delle due è di classe* C^1, $(fg)' = f'g + fg'$; *inoltre, se* $H \in C^1(\mathbb{R})$, *allora* $H \circ f$ *ha una derivata debole con* $(H \circ f)' = H' \circ f \cdot f'$; *se poi* f *ha una derivata debole su* (a,b), *allora lo è anche su* (c,d) *se* $(c,d) \subset (a,b)$.
4. *La definizione di derivata debole può essere data equivalentemente considerando, per densità, solo* $\varphi \in C_0^\infty((a,b))$.

Vediamo ora una caratterizzazione equivalente delle funzioni che hanno derivata debole. Sono essenzialmente le stesse funzioni per cui vale il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Definizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *con* $a < b$ *e sia* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$.
u *si dice* ***assolutamente continua*** *su* $[a,b]$ *se è derivabile q.o. in* $[a,b]$ *e la sua derivata* $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ *verifica* $u(y) = u(x) + \int_x^y u'$ *per ogni* $x, y \in [a,b]$; *si indica con il simbolo* $u \in AC([a,b])$.

Esempio.
La funzione di Cantor f *su* $[0,1]$ *è continua e derivabile q.o., con* $f' \equiv 0$, *ma non è assolutamente continua perché* $f(1) - f(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 f'$.

Lemma.
Sia $h \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ *tale che* $\int_a^b h\varphi' = 0$ *per ogni* $\varphi \in C_0^1((a,b))$.
Allora $h \equiv c$ *q.o. in* (a,b), *per qualche* $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.
Fisso $\eta_0 \in C_0^1((a,b))$ tale che $\int_a^b \eta_0 = 1$ e pongo, per $\psi \in C_0^1((a,b))$, $\varphi(x) := \int_a^x \psi - \left(\int_a^b \psi\right) \int_a^x \psi_0$.
Poiché $\varphi \in C_0^1((a,b))$, allora

$$0 = \int_a^b h\varphi' = \int_a^b \left(h\psi - h\eta_0 \int_a^b \psi\right) = \int_a^b \psi \left(h - \int_a^b h\eta_0\right).$$

Essendo ψ arbitraria, per densità dovrà essere $h \equiv \int_a^b h\eta_0$ q.o. in (a,b). □

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *con* $a < b$ *e sia* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$.
Allora, u *ha una derivata debole in* (a,b) *se e solo se esiste* $v \in AC([a,b])$ *tale che* $u \equiv v$ *q.o. su* (a,b) *e, in caso affermativo, la derivata debole di* u *coincide con quella di* v.

Dimostrazione.
Supponiamo che $u \in AC([a,b])$, a meno di insiemi di misura nulla. Allora, se $\varphi \in C_0^1((a,b))$ e $\varphi|_{[a,x_0]} \equiv 0$, allora

$$\int_a^b u\varphi' \quad = \quad \int_a^b \left(u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t)\mathrm{d}t\right) \varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^{b}\left(\int_{x_0}^{x} u'(t)\mathrm{d}t\right)\varphi'(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_{x_0}^{b}\left(\int_{t}^{b} \varphi'(x)\mathrm{d}x\right)u'(t)\mathrm{d}t\\
&= -\int_{x_0}^{b}\varphi(t)u'(t)\mathrm{d}t\\
&= -\int_{a}^{b}u'\varphi;
\end{aligned}
$$

dunque, u ha una derivata debole e la sua derivata debole coincide con quella q.o.. Se poi $v\equiv u$ q.o., sappiamo che anche v ha una derivata debole che coincide con quella di u.
Supponiamo viceversa che u abbia derivata debole u'e, fissato $x_0\in(a,b)$, poniamo $v(x):=u(x_0)+\int_{x_0}^{x}u'$: è assolutamente continua per costruzione e verifica $v'=u'$. Inoltre, abbiamo appena visto che $\int_a^b v\varphi'=-\int_a^b u'\varphi$ per ogni $\varphi\in C_0^1((a,b))$; del resto, dalla definizione di derivata debole sappiamo anche che $\int_a^b u\varphi'=-\int_a^b u'\varphi$, quindi $\int_a^b(u-v)\varphi'$ e cioè, dal Lemma precedente, $u-v\equiv c$ q.o. in (a,b). Infine, poiché per costruzione $v(x_0)=u(x_0)$, allora $c=0$ e quindi $u\equiv v$ q.o.. $\square$

Consideriamo ora gli spazi di funzioni le cui derivate deboli appartengono a qualche spazio L^p. Questi spazi si riveleranno essere quelli giusti per lo studio delle equazioni differenziali.

Definizione.
Siano $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ con $a<b$ e $p\in[1,+\infty]$.
*Lo **spazio di Sobolev** $W^{1,p}((a,b))$ è il sottospazio di $L^p([a,b])$ dato dalle funzioni che hanno derivate deboli appartenenti anch'esse a $L^p([a,b])$, ovvero:*

$$W^{1,p}((a,b)):\{u\in L^p([a,b]):\ u \text{ ha una derivata debole } u'\in L^p([a,b])\}.$$

Per ogni u in $W^{1,p}((a,b))$ definiamo $\|u\|_{W^{1,p}((a,b))}:=\|u\|_{L^p([a,b])}+\|u'\|_{L^p([a,b])}$.
Analogamente definiamo $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}((a,b)):=\left\{u\in L^p_{\mathrm{loc}}((a,b)):\ u\in W^{1,p}((c,d))\ \forall\,(c,d)\Subset(a,b)\right\}$.

Esempio.
$u(x)=|x|^\alpha$ ha una derivata debole, se $0<\alpha<1$, data da $u'(x)=\dfrac{\mathrm{segno}(x)}{|x|^{1-\alpha}}$; se $a<0<b$, allora $u'\in L^p([a,b])$ se e solo se $p<\dfrac{1}{1-\alpha}$, dunque $u\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}((a,b))$ solo per questi valori. La dimostrazione di questo fatto è analoga al caso già visto $\alpha=1$, per cui otteniamo $u'\in L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi $u\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ per ogni $p\in[1,+\infty]$.

Osservazione.

1. *Se $a,b\in\mathbb{R}$ allora $W^{1,p}((a,b))\subset W^{1,q}((a,b))$ se $p\geq q$; in generale, per a,b qualunque avremo $W^{1,p}_l oc((a,b))\subset W^{1,q}_{\mathrm{loc}}((a,b))$ se $p\geq q$.*
2. *$\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$ è una norma su $W^{1,p}((a,b))$.*
3. *Se $p<+\infty$, una norma equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$ è data da $\|u\|:=\left(\|u\|^p_{L^p([a,b])}+\|u'\|^p_{L^p([a,b])}\right)^{\frac{1}{p}}$.*
4. *Nel caso $p=2$, la norma $\|u\|=\sqrt{\|u\|^2_{L^2([a,b])}+\|u'\|^2_{L^2([a,b])}}$ è data dal prodotto scalare*

$$(u,v)_{W^{1,2}((a,b))}:=(u,v)_{L^2([a,b])}+(u',v')_{L^2([a,b])}=\int_a^b(uv+u'v').$$

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *con* $a < b$ *e* $p \in [1, +\infty]$.
Allora lo spazio di Sobolev $W^{1,p}((a,b))$ *è* <u>*completo*</u> *rispetto alla norma* $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$.
In particolare, per $p = 2$, $W^{1,2}((a,b))$ *è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare* $(u,v)_{W^{1,2}((a,b))}$.

Dimostrazione.
Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$. Allora, u_n e u_n' sono entrambe di Cauchy in $L^p([a,b])$ e dunque, per la completezza degli spazi L^p, avremo $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u$ e $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} g$ in $L^p([a,b])$ per qualche $u, g \in L^p([a,b])$. Dunque, data $\varphi \in C_0^1((a,b))$ avremo

$$-\int_a^b g\varphi \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} -\int_a^b u_n'\varphi = \int_a^b u_n\varphi' \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b u\varphi',$$

cioè $u' = g$ e $\|u_n - u\|_{W^{1,p}((a,b))} = \|u_n - u\|_{L^p([a,b])} + \|u_n' - g\|_{L^p([a,b])} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. □

Anche per gli spazi di Sobolev c'è una caratterizzazione equivalente data dal seguente risultato.

Teorema (Caratterizzazione degli spazi di Sobolev)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *con* $a < b$, $p \in (1, +\infty]$ *e* $u \in L^p([a,b])$.
Allora, le seguenti condizioni si equivalgono:

a. $u \in W^{1,p}((a,b))$.

b. Esiste $C > 0$ *tale che* $\left|\int_a^b u\varphi'\right| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}([a,b])}$ *per ogni* $\varphi \in C_0^1((a,b))$, *con* $p' \in [1, +\infty)$ *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

c. Esiste $C > 0$ *tale che* $\|u(\cdot + h) - u\|_{L^p([c,d])} \le C|h|$ *per ogni* c, d, h *tale che* $[c,d] \subset (a + |h|, b - |h|)$.

Se $p = 1$, *allora a implica b e c, che sono tra loro equivalenti.*
In tutti i casi, se $u \in W^{1,p}((a,b))$, *allora in b e c si può scegliere* $C = \|u'\|_{L^p([a,b])}$.

Dimostrazione.

$a \Rightarrow b$ Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ allora per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$ vale

$$\left|\int_a^b u\varphi'\right| \le \left|-\int_a^b u'\varphi\right| \le \|u'\|_{L^p([a,b])}\|\varphi'\|_{L^{p'}([a,b])}.$$

$b \Rightarrow a$ Per ipotesi, il funzionale lineare $L : \varphi \mapsto -\int_a^b u\varphi'$ è continuo su $C_0^1((a,b))$ rispetto a $\|\cdot\|_{L^{p'}([a,b])}$, dunque può essere esteso per densità a un funzionale $\widetilde{L} \in \left(L^{p'}([a,b])\right)^*$, che quindi sarà del tipo $\widetilde{L}f = \int_a^b fg$ per qualche $g \in L^p([a,b])$. Avremo dunque, per $\varphi \in C_0^1((a,b))$,

$$-\int_a^b u\varphi' = L\varphi = \widetilde{L}\varphi = \int_a^b \varphi g,$$

cioè $u \in W^{1,p}((a,b))$.

$b \Rightarrow c$ Prendendo $\varphi \in C_0^1((a,b))$ e h tale che $\varphi \equiv 0$ all'infuori di $(a + |h|, b - |h|)$: avremo

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{u(x+h) - u(x)}{h}\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{u(x+h)\varphi(x)}{h}\mathrm{d}x - \int_a^b \frac{u\varphi}{h} \\ &= \int_a^b \frac{u(y)\varphi(y-h)}{h}\mathrm{d}y - \int_a^b \frac{u\varphi}{h}\end{aligned}$$

$$= \quad -\int_a^b u(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(y-h)}{h}\mathrm{d}y.$$

Poiché, nell'ultima formula, $\left|\dfrac{\varphi(y)-\varphi(y-h)}{h}\right| \leq C$ e $u \in L^1([a,b])$, allora possiamo applicare il teorema di convergenza dominata e il limite per $h \to 0$ sarà $-\displaystyle\int_a^b u\varphi'$, e dunque per ipotesi avremo

$$\left|\int_a^b \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}([a,b])},$$

con C indipendente da h. Consideriamo ora la disuguaglianza precedente con $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_0^1((a,b))$ tale che $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} |u(\cdot+h)-u|^{p-2}(u(\cdot+h)-u)$ in $L^{p'}([a,b])$: otterremo

$$\int_a^b \frac{|u(\cdot+h)-u|^p}{h} \leq C\|u(\cdot+h)-u\|^{p-1}_{L^p([a,b])},$$

cioè $\|u(\cdot+h)-u\|_{L^p([a,b])} \leq C|h|$.

$c \Rightarrow b$ Per ipotesi, se $\varphi \in C_0^1((a,b))$ e $\varphi \equiv 0$ all'infuori di $(a+|h|, b-|h|)$, allora

$$\left|\int_a^b \frac{u(\cdot+h)-u}{h}\varphi\right| \leq \left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{h}\right\|_{L^p([a,b])}\|\varphi\|_{L^{p'}([a,b])} \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}([a,b])}.$$

Inoltre, ragionando come nel punto precedente, otteniamo $\displaystyle\int_a^b \frac{u(\cdot+h)-u}{h}\varphi \underset{h\to 0}{\to} -\int_a^b u\varphi'$ e dunque $\left|\displaystyle\int_a^b u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}([a,b])}$.

□

Corollario.
Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ per qualche $p > 1$ e $H \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ verifica una tra: $H(0) = 0$; $p = \infty$ $a, b \in \mathbb{R}$; allora $H(u) \in W^{1,p}((a,b))$ e $H(u)' = H'(u)u'$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, $H(u) \in L^p((a,b))$: infatti, $H(0) = 0$ allora $\displaystyle\int_a^b |H(u)|^p \leq \|H\|^p_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})}\int_a^b |u|^p < +\infty$, e analogamente negli altri casi; dunque possiamo applicare il Teorema di caratterizzazione degli spazi di Sobolev. Se $u \in W^{1,p}((a,b))$, allora $\|u(\cdot+h)-u\|_{L^p([c,d])} \leq C|h|$ per c, d, h come nel teorema precedente. Dunque, $\|H(u(\cdot+h))-H(u)\|_{L^p([c,d])} \leq \|H\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R})}\|u(\cdot+h)-u\|_{L^p([c,d])} \leq C|h|$ e quindi anche $H(u)$ verifica la stessa condizione, per cui il teorema e ottenere $H(u) \in W^{1,p}((a,b))$. Per quanto visto in precedenza, $H(u)$ sarà derivabile quasi ovunque e la derivata debole coincide con quella usuale, cioè $H'(u)u'$. □

Osservazione.

1. *Se $p = +\infty$, la condizione c equivale a essere una funzione Lipschitz, dunque dal teorema deduciamo $W^{1,\infty}([a,b]) = \mathrm{Lip}((a,b))$; questo è coerente con quanto visto per $u(x) = |x|$.*

2. *Se $p = 1$ allora b e c non implicano a: ad esempio, $u(x) = \mathrm{segno}(x)$ verifica, per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$,*

$$\left|\int_a^b u\varphi'\right| \leq 2|\varphi(0)| \leq 2\|\varphi\|_{L^\infty([a,b])} \qquad \int_a^b |u(\cdot+h)-u| \leq 2|h|,$$

nonostante u non abbia derivata debole e quindi $u \notin W^{1,1}((a,b))$ se $a < 0 < b$. In qualche senso, si potrebbe dire che u ha come derivata debole non una funzione in L^1_{loc} ma piuttosto una misura, data da $2\delta_0$.

Per studiare le prossime proprietà degli spazi di Sobolev è necessario introdurre alcune nozioni, che sono fondamentali in analisi funzionale e lo saranno anche nell'ultima parte del corso.

Definizione.
Siano X, Y spazi normati e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.
A si dice operatore ***compatto*** *se per ogni successione limitata $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X la sua immagine $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha estratte convergenti in Y; in altre parole, A è compatto se $A(C) \subset Y$ è relativamente compatto in Y per ogni insieme limitato $C \subset X$.*
L'insieme degli operatori compatti si indica con $\mathcal{K}(X, Y)$ e, se $X = Y$, con $\mathcal{K}(X)$.

Osservazione.

1. *In generale, ogni $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ manda limitati in limitati e relativamente compatti in relativamente compatti, ma non limitati in relativamente compatti.*

2. *Se uno tra $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ è compatto, allora $B \circ A \in \mathcal{L}(X, Z)$ è compatto.*

Proposizione.
Sia X uno spazio normati e Y uno spazio di un Banach e $\mathcal{K}(X, Y)$ l'insieme degli operatori compatti da X a Y.
Allora $\mathcal{K}(X, Y) \lhd \mathcal{L}(X, Y)$:

Dimostrazione.
Si verifica facilmente che gli operatori compatti formano un sottospazio lineare è evidente. Inoltre, se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{K}(X, Y)$ tale che $A_n \underset{n\to+\infty}{\to} A$, allora per ogni successione limitata $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in X $\{A_n x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ avrà, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un'estratta convergente che è in particolare di Cauchy; dunque, se $\|x_m\| \le C$ e $\|A - A_{N_0}\| \le \varepsilon$ e $\|A_{N_0} x_n - A_{N_0} x_m\| \le \varepsilon$, allora

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - Ax_m\| &\le \|Ax_n - A_{N_0}x_n\| + \|A_{N_0}x_n - A_{N_0}x_m\| + \|A_{N_0}x_m - Ax_m\| \\
&\le \|A - A_{N_0}\|(\|x_n\| + \|x_m\|) + \varepsilon \\
&\le (2C + 1)\varepsilon,
\end{aligned}$$

dunque $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi converge, e quindi A è compatto. □

Esempio.

1. *Se $\dim Y < +\infty$, allora ogni operatore lineare è compatto perché tutti gli insiemi limitati in Y sono relativamente compatti; grazie alla proposizione precedente, sono operatori compatti anche i limiti, in norma operatoriale, degli operatori di rango finito.*

2. *Se $Y = X$ e $\dim X = +\infty$ allora l'identità $\mathbb{I}_X : X \to X$ non è un operatore compatto perché la palla unità è limitata ma la sua immagine, che è la stessa palla unità, non è relativamente compatta.*

3. *La mappa $A : \ell_2 \to \ell_2$ data da $Ax(k) = \dfrac{x(k)}{k}$ è compatta, perché è il limite della successione di operatori di rango finito A_n dati da $A_n x(k) = \begin{cases} \dfrac{x(k)}{k} & se\ k \le n \\ 0 & se\ k > n \end{cases}$: infatti,*

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x(k)^2}{k^2}} \le \sup_{\|x\|\le 1} \frac{\|x\|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Un risultato analogo si ottiene prendendo, al posto di $\dfrac{x(k)}{k}$, $x(k)a_k$ per una qualsiasi successione infinitesima a_k.

Definizione.
Siano $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ *spazi normati tali che* $X \subset Y$.
Si dice che X ***si immerge in modo continuo*** *in* Y *se l'inclusione* $i : X \to Y$ *data da* $i(x) = x$ *è* *continua, cioè* $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ *per ogni* $x \in X$ *e qualche* $C > 0$. *L'immersione continua si denota con il simbolo* $X \hookrightarrow Y$.
Si dice che X ***si immerge in modo compatto*** *in* Y *se l'inclusione* $i : X \to Y$ *è compatta, cioè se per ogni successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *limitata in* X *allora, a meno di estratte,* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ *rispetto a* $\|\cdot\|_Y$ *per qualche* $y \in X$.

Esempio.

1. *Ogni sottospazio lineare* $E \subset X$ *di uno spazio normato* X *si immerge in modo continuo in* X*; l'immersione è compatta se e solo se* $\dim E < +\infty$.
2. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *allora* $L^p([a, b])$ *si immerge in modo continuo in* $L^q([a, b])$ *se* $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ *e analogamente* $W^{1,p}((a, b))$ *si immerge in modo continuo in* $W^{1,p}((a, b))$*; inoltre* $C^{0,\alpha}([a, b]) \hookrightarrow C^{0,\beta}([a, b])$ *se* $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ *e* $C^{0,\alpha}([a, b]) \hookrightarrow L^p([a, b])$ *per ogni* $p \in [1, +\infty]$, $\alpha \in [0, 1]$.
3. *Negli spazi di successioni l'immersione continua* $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ *vale per* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

Mostreremo ora che gli spazi di Sobolev si immergono nei ben noti spazi di funzioni Hölderiane. Per dimostrare questo risultato richiameremo un teorema fondamentale in analisi.

Teorema (di Ascoli-Arzelà)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione limitata in* $C([a, b])$ *ed equicontinua, cioè tale che*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \quad |x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Allora, u_n *ha estratte convergenti in* $C([a, b])$.

Teorema (di immersione di Sobolev)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *con* $a < b$, $p \in [1, +\infty]$ *e* $u \in W^{1,p}((a, b))$. *Allora,* $u \in C^{0,1-\frac{1}{p}}((a, b))$ *e in particolare* u *è continua e limitata su* (a, b).
Inoltre, $W^{1,p}((a, b))$ *si immerge in modo continuo in* $C^{0,1-\frac{1}{p}}((a, b))$.
Infine, se $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $p > 1$*, allora* $W^{1,p}((a, b))$ *si immerge in modo compatto in* $C^{0,\alpha}([a, b])$ *per ogni* $\alpha < 1 - \dfrac{1}{p}$.

Dimostrazione.
Prendiamo $u \in W^{1,p}((a, b))$ e mostriamo che $u \in L^\infty([a, b])$. Nel caso $p = \infty$ è ovvio, viceversa se $u \in L^p([a, b])$ per $p \in [1, +\infty)$, allora esisterà $x_0 \in (a, b)$ tale che $|u(x_0)| \leq \delta\|u\|_{L^p([a,b])}$, con $\delta = \dfrac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}$ se $a, b \in \mathbb{R}$, mentre se $b - a = +\infty$ è possibile scegliere qualsiasi $\delta > 0$. Inoltre, poiché $H(t) = |t|^{p-1}t$ è localmente Lipschitz e $H(0) = 0$, allora per il corollario precedente $|u|^{p-1}u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}((a, b))$ anche se $p > 1$, dunque per una proposizione precedente si può applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &= |H(u(x))| \\
&\leq |H(u(x_0))| + \int_{x_0}^{x} |H'(u)|u' \\
&\leq |u(x_0)|^p + \int_a^b p|u|^{p-1}u' \\
&\leq \delta\|u\|^p_{L^p([a,b])} + p\|u\|^{p-1}_{L^p([a,b])}\|u'\|_{L^p([a,b])} \\
&\leq C\left(\|u\|^p_{L^p([a,b])} + \|u'\|^p_{L^p([a,b])}\right)
\end{aligned}$$

e dunque, passando all'estremo superiore, $u \in L^\infty([a, b])$.
Applicando poi a u il teorema fondamentale del calcolo e la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_y^x u'\right| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_y^x |u'|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,p}((a,b))},$$

e analogamente nel caso $p=+\infty$; questo dimostra anche l'immersione continua in $C^{0,1-\frac{1}{p}}((a,b))$. Dimostriamo l'immersione compatta: se $|x-y|\le\delta$, allora $|u_n(x)-u_n(y)|\le C|x-y|^{1-\frac{1}{p}}\le C\delta^{1-\frac{1}{p}}$ e dunque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua e quindi, se $a,b\in\mathbb{R}$, dal Teorema di Ascoli-Arzelà $\{u_n\}$ avrà un estratta uniformemente convergente a u; pertanto, a meno di estratte, per $\alpha<1-\dfrac{1}{p}$ avremo

$$
\begin{aligned}
&\frac{|u_n(x)-u(x)-(u_n(y)-u(x))|}{|x-y|^\alpha}\\
=\;&\left|\frac{u_n(x)-u_n(y)}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}}+\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}}\right|^{\frac{\alpha}{1-\frac{1}{p}}}(|u_n(x)-u(x)+u(y)-u_n(y)|)^{1-\frac{\alpha}{1-\frac{1}{p}}}\\
\le\;&\left(\frac{|u_n(x)-u_n(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}}+\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\frac{1}{p}}}(|u_n(x)-u(x)|+|u(y)-u_n(y)|)^{1-\frac{\alpha}{1-\frac{1}{p}}}\\
\le\;&C(2\|u_n-u\|_{L^\infty([a,b])})^{1-\frac{\alpha}{1-\frac{1}{p}}},
\end{aligned}
$$

e quindi $u_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ anche in $C^{0,\alpha}([a,b])$. □

Osservazione.

1. *Se $a,b\in\mathbb{R}$, allora $C^{0,\alpha}([a,b])\hookrightarrow L^q([a,b])$ per ogni $q\in[1,+\infty]$ e $\alpha\in[0,1]$; dunque, dal Teorema di immersione di Sobolev deduciamo che $W^{1,p}((a,b))$ si immerge in modo compatto in ogni $L^q([a,b])$.*

2. *Se $a=-\infty$ oppure $b=+\infty$, nessuna delle precedenti immersioni è compatta: fissata $u_0\in C^1_0((a,b))\setminus\{0\}$, la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da $u_n(x)=u_0(x\pm n)$ è limitata in ogni $W^{1,p}((a,b))$, perché $\|u_n\|_{W^{1,p}((a,b))}=\|u_0\|_{W^{1,p}((a,b))}$; tuttavia, u_n non converge in nessun $C^{0,\alpha}([a,b])$ né in $L^q([a,b])$, perché il limite puntuale è $u\equiv0$, ma u_n non può convergere a zero perché $\|u_n\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}=\|u_0\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}$ e $\|u_n\|_{L^q([a,b])}=\|u_0\|_{L^q([a,b])}$.*

3. *Le immersioni $W^{1,p}((a,b))\hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}((a,b))$ e $W^{1,1}((a,b))\hookrightarrow C([a,b])$ non sono mai compatte: infatti, supponendo a meno di traslazioni $0\in(a,b)$, fissiamo $u_0\in C^1_0((a,b))\setminus\{0\}$ e definiamo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come $u_n(x):=\dfrac{u(nx)}{n^{1-\frac{1}{p}}}$; poiché*

$$\|u_n\|_{L^p([a,b])}=\frac{\|u_0\|_{L^p([a,b])}}{n}\qquad\qquad \|u_n'\|_{L^p([a,b])}=\|u_0'\|_{L^p([a,b])},$$

la successione è limitata in $W^{1,p}((a,b))$, converge puntualmente a zero, ma la convergenza non in norma perché

$$\sup_{x,y\in(a,b),x\ne y}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}}\sup_{x',y'\in(a,b),x'\ne y'}\frac{|u(x')-u(y')|}{|x'-y'|^{1-\frac{1}{p}}}\underset{n\to+\infty}{\not\to}0.$$

Analogamente, definendo $u_n(x)=u(nx)$ si ottiene una successione limitata in $W^{1,1}((a,b))$ che non ha estratte convergenti in $L^\infty([a,b])$.

Esempio.

1. *$u(x)=|x|^\alpha$, se $0<\alpha\le1$, appartiene a $C^{0,\alpha}([-1,1])$ e, come abbiamo visto, anche a $W^{1,p}((-1,1))$ per $p<\dfrac{1}{1-\alpha}$, cioè $\alpha<1-\dfrac{1}{p}$.*

2. *$u(x)=\dfrac{|x|^{1-\frac{1}{p}}}{\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{2}{p}}}$ appartiene a $W^{1,p}\left(\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\right)$, e dunque anche a $C^{0,1-\frac{1}{p}}\left(\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\right)$, perché $u'(x)$ ha lo stesso andamento, per x vicino a 0, di $\dfrac{1}{|x|^{\frac{1}{p}}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{2}{p}}}$; tuttavia, $u\notin$*

$C^{0,\alpha}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ *per nessun* $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$. *Analogamente,* $u(x) = \frac{1}{\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}$ *appartiene a* $W^{1,1}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ *e* $C\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ *ma a nessun* $C^{0,\alpha}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ *per* $\alpha > 0$.

Consideriamo ora un sottospazio particolarmente interessante degli spazi di Sobolev.

Definizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e* $p \in [1, +\infty]$.
Definiamo lo spazio delle funzioni di Sobolev nulle al bordo

$$W_0^{1,p}((a,b)) := \{u \in W^{1,p}((a,b)),\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Osservazione.

1. *La definizione è ben posta perché, dal Teorema di immersione di Sobolev,* $W^{1,p}((a,b)) \subset C^{0,1-\frac{1}{p}}((a,b))$ *e dunque è continua fino ai punti di bordo.*

2. $W_0^{1,p}((a,b)) \lhd W^{1,p}((a,b))$*: che sia un sottospazio lineare è immediato, e inoltre se* $u_n \in W_0^{1,p}((a,b))$ *e* $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u$ *in* $W^{1,p}((a,b))$*, allora*

$$|u(a)| = |u_n(a) - u(a)| \leq \|u_n - u\|_\infty \leq \|u_n - u\|_{W^{1,p}((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

e allo stesso modo $u(b) = 0$.

3. $W_0^{1,p}((a,b)) \underset{\neq}{\lhd} W^{1,p}((a,b))$ *perché ad esempio le costanti appartengono a* $W^{1,p}((a,b))$ *ma non a* $W_0^{1,p}((a,b))$.

4. *Nel caso in cui* $a = -\infty$ *oppure* $b = +\infty$ *è possibile definire* $W_0^{1,p}((a,b))$ *imponendo come condizioni* $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$ *oppure* $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$*; tuttavia, se* $p < +\infty$ *i limiti all'infinito sono sempre nulli negli spazi di Sobolev e quindi in particolare* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$. *Per vederlo, notiamo innanzi tutto che per ogni* $u \in L^p(\mathbb{R})$ *esiste una successione* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ *per cui* $u(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$*; se per* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ *esistesse* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ *che verifica* $|u(y_n)| \geq \delta > 0$*, allora applicando il teorema fondamentale del calcolo a* $|u|^{p-1}u$ *si ottiene la seguente contraddizione:*

$$\begin{aligned}
\delta^p \underset{n\to+\infty}{\leftarrow}\ & \delta^p - |u(x_n)|^p \\
\leq\ & |u(y_n)|^p - |u(x_n)|^p \\
\leq\ & \left||u(y_n)|^{p-1}u(y_n) - |u(x_n)|^{p-1}u(x_n)\right| \\
=\ & \left|\int_{x_n}^{y_n} p|u|^{p-1}u'\right| \\
\leq\ & \int_{x_n}^{y_n} (|u|^p + (p-1)|u'|^p) \\
\underset{n\to+\infty}{\to}\ & 0,
\end{aligned}$$

con l'ultimo passaggio al limite giustificato dal Teorema di convergenza dominata con maggiorante integrabile data da $|u|^p + (p-1)|u'|^p$.

Teorema (Disuguaglianza di Poincaré)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, $p \in [1, +\infty]$ *e* $u \in W_0^{1,p}((a,b))$.
Allora esiste $C > 0$*, indipendente da* u*, tale che* $\|u\|_{W^{1,p}((a,b))} \leq C\|u'\|_{L^p([a,b])}$.
In particolare, una norma equivalente su $W_0^{1,p}((a,b))$ *è data da* $\|u'\|_{L^p([a,b])}$.

Dimostrazione.
Sarà sufficiente dimostrare che $\|u\|_{L^p([a,b])} \leq C\|u'\|_{L^p([a,b])}$ per qualche $C > 0$; questo seguirà applicando a u il teorema fondamentale del calcolo e la disuguaglianza di Hölder:

$$\int_a^b |u(x)|^p \mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^x u'\right|^p \mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\int_a^x |u'|^p\right)(x-a)^{p-1}\mathrm{d}x \leq (b-a)^p \int_a^b |u'|^p;$$

nel caso $p = +\infty$ similmente si ottiene

$$|u(x)| \leq \left|\int_a^x u'\right| \leq \int_a^b |u'| \leq (b-a)\|u'\|_\infty,$$

dunque per ogni p si ha $\|u\|_{L^p([a,b])} \leq (b-a)\|u'\|_{L^p([a,b])}$. □

Osservazione.

1. *Come segue dalla dimostrazione, la disuguaglianza di Poincaré vale anche per le funzioni che verificano solo $u(a) = 0$ oppure solo $u(b) = 0$.*
2. *La disuguaglianza di Poincaré non vale su $W^{1,p}((a,b))$ perché ad esempio le funzioni costanti $u \equiv C$ verificano $\|u'\|_{L^p([a,b])} = 0$ ma $\|u\|_{L^p([a,b])} \neq 0$.*
3. *Nel caso $p = 2$, un prodotto scalare equivalente su $W_0^{1,2}((a,b))$ è dato da $(u,v) = \int_a^b u'v'$; più in generale, è possibile scegliere $(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)$ per qualsiasi $p \in L^1([a,b]), q \in L^\infty([a,b])$ con $p \geq \delta > 0$ e $q \geq 0$.*

Grazie alla disuguaglianza di Poincaré deduciamo che le funzioni lisce a supporto compatto sono dense anche in questi spazi $W_0^{1,p}$.

Lemma.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $p \in [1, +\infty)$.
Allora, lo spazio delle funzioni lisce a supporto compatto $C_0^\infty((a,b))$ è denso in $W_0^{1,p}((a,b))$.

Dimostrazione.
Fissata $u \in W_0^{1,p}((a,b))$, per la densità di $C_0^\infty((a,b))$ esisterà $\psi_n \in C_0^\infty((a,b))$ tale che $\psi_n \underset{n\to+\infty}{\to} u'$ in $L^p([a,b])$; presa $\eta_0 \in C_0^\infty((a,b))$ che valga costantemente 0 in un intorno di a e costantemente 1 in un intorno di b, definiamo $\varphi_n(x) := \int_a^x \psi_n - \left(\int_a^b \psi_n\right)\eta_0(x)$. La successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è in $C_0^\infty((a,b))$ perché per x vicino ad a abbiamo $\int_a^x \psi_n = 0 = \eta_0(x)$ mentre per x vicino a b vale $\int_a^x \psi_n = \int_a^b \psi_n$ e $\eta_0(x) = 1$, e inoltre approssima u_n in $W^{1,p}((a,b))$: essendo $\int_a^b u' = u(b) - u(a) = 0$, avremo

$$\varphi_n'(x) = \psi_n'(x) - \left(\int_a^b (\psi_n - u')\right)\eta_0(x),$$

dunque applicando la Disuguaglianza di Poincaré si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - u\|_{W^{1,p}((a,b))} &\leq C\|\varphi_n' - u'\|_{L^p([a,b])} \\
&\leq C\left(\left|\int_a^b (\psi_n - u')\right| \|\eta_0'\|_{L^p([a,b])} + \|\psi_n - u'\|_{L^p([a,b])}\right) \\
&\leq C\|\psi_n - u'\|_{L^p([a,b])} \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

□

Corollario.

1. *Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ allora $\int_a^b uv' = -\int_a^b u'v$ per ogni $v \in W_0^{1,1}((a,b))$*

2. *Se $u, v \in W^{1,p}((a,b))$, allora $uv \in W^{1,p}((a,b))$ e $(uv)' = uv' + u'v$.*
   Se $u \in W^{1,p}((a,b))$ e $|u| \geq \delta > 0$ allora $\frac{1}{u} \in W^{1,p}((a,b))$ e $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
   Se $H \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ verifica una tra: $H(0) = 0$, $p = \infty$; $a, b \in \mathbb{R}$; allora $H(u) \in W^{1,p}((a,b))$ e $H(u)' = H'(u)u'$.

Dimostrazione.

1. Se $v \in W_0^{1,1}((a,b))$, allora per il lemma precedente esiste $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $W_0^{1,1}((a,b))$, dunque applicando il Teorema di immersione di Sobolev si ottiene:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b u(\varphi_n' - v')\right| &\leq \|u\|_{L^\infty([a,b])}\|\varphi_n' - v'\|_{L^1([a,b])} \leq C\|u\|_{W^{1,p}((a,b))}\|\varphi_n - v\|_{W^{1,1}([a,b])} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \\ \left|\int_a^b u'(\varphi_n - v)\right| &\leq \|u'\|_{L^p([a,b])}\|\varphi_n - v\|_{L^{p'}([a,b])} \leq C\|u\|_{W^{1,p}((a,b))}\|\varphi_n - v\|_{W^{1,1}([a,b])} \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

   e dunque, usando φ_n nella definizione di derivata debole di u,

$$\int_a^b uv' \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \int_a^b u\varphi_n' = -\int_a^b u'\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\int_a^b u'v.$$

2. Fissata $\varphi \in C_0^1((a,b))$, considero $\eta_0 \in C_0^\infty((a,b))$ che valga 1 sul supporto di φ, in modo che $\eta_0\varphi = \varphi$; dunque $\eta_0 u \in W_0^{1,p}((a,b))$ e, se $p < +\infty$, esiste una successione $\{\psi_n\}$ in $C_0^\infty((a,b))$ tale che $\psi_n \underset{n\to+\infty}{\to} \eta_0 u$ in $W^{1,p}((a,b))$, quindi

$$\int_a^b |\psi_n\varphi - u'\varphi|^p = \int_a^b |\psi_n - \eta_0 u'|^p|\varphi|^p \leq C\int_a^b |\psi_n - \eta_0 u'|^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   e analogamente, grazie al Teorema di immersione di Sobolev,

$$\psi_n\varphi' \underset{n\to+\infty}{\to} u\varphi' \qquad \psi_n\varphi \underset{n\to+\infty}{\to} u\varphi \qquad \text{in} \quad L^\infty([a,b]).$$

   Pertanto, utilizzando la formula di derivazione del prodotto e poi ragionando come nella dimostrazione del punto precedente,

$$\int_a^b uv\varphi' \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \int_a^b \psi_n v\varphi' = -\int_a^b (\psi_n v' + \psi_n' v)\varphi \underset{n\to+\infty}{\to} -\int_a^b (uv' + u'v)\varphi;$$

   infine, poiché dai teoremi di immersione di Sobolev si ottiene $u, v \in L^\infty([a,b])$, allora $(uv)' \in L^p([a,b])$.
   Se $p = +\infty$, allora $u, v \in W^{1,\infty}((a,b))$ apparterranno anche a $W_{\mathrm{loc}}^{1,p}((a,b))$ per ogni $p < \infty$; applicando il ragionamento precedente sul supporto di φ, che è limitato, si ottiene $(uv)' = uv' + u'v$, ma essendo $u, v, u', v' \in L^\infty([a,b])$ deduciamo $uv \in W^{1,\infty}((a,b))$.
   Le altre affermazioni si dimostrano in maniera analoga (nel caso $p > 1$ il risultato può essere ottenuto equivalentemente applicando il Teorema di caratterizzazione degli spazi di Sobolev, come già fatto in precedenza per la composizione di funzioni).

□

Osservazione.

1. *Lo spazio $C_0^\infty((a,b))$ non può essere denso in $W^{1,p}((a,b))$; infatti, se lo fosse, dal Teorema di immersione di Sobolev potremmo approssimare in norma $\|\cdot\|_\infty$ una funzione che non si annulla sul bordo con funzioni a supporto compatto, che è impossibile. In particolare, $W_0^{1,p}((a,b))$ si può caratterizzare come la chiusura di $C_0^\infty((a,b))$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}((a,b))}$.*

2. *$C_0^\infty((a,b))$ non può essere denso neanche in $W^{1,\infty}((a,b))$, perché se $u' \in L^\infty([a,b]) \setminus C([a,b])$ non può essere approssimata in norma $\|\cdot\|_{L^\infty([a,b])}$ con funzioni in $C_0^\infty((a,b))$.*

3. *$C_0^\infty(\mathbb{R})$ è invece denso in $W^{1,p}(\mathbb{R})$, e la dimostrazione è analoga al caso di $W_0^{1,p}((a,b))$ perché, come abbiamo già visto, $W^{1,p}(\mathbb{R}) = W_0^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Possiamo finalmente applicare queste proprietà degli spazi di Sobolev per studiare alcune equazioni differenziali chiamate problemi di valori al bordo.

Definizione.
*Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty([a,b])$, $q, f \in L^1([a,b])$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$ e $f \in L^2([a,b])$. Si dice che $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ è una **soluzione debole** del problema*

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

se $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ e $(-pu')$ ha una derivata debole su (a,b) che verifica $(-pu')' + qu = f$ q.o. su (a,b); in altre parole, se per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$,

$$\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi) = \int_a^b f\varphi.$$

Osservazione.

1. *Le soluzioni deboli verificano $\int_a^b (pu'v' + quv) = \int_a^b fv$ anche per ogni $v \in W_0^{1,2}((a,b))$; infatti, prendendo una successione $\{\varphi_n\}$ che approssima v in $W^{1,2}((a,b))$, essendo $pu', qu, f \in L^2([a,b])$, avremo*

$$\int_a^b (pu'v' + quv) \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \int_a^b (pu'\varphi_n' + qu\varphi_n) = \int_a^b f\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \int_a^b fv.$$

2. *Se $p \in C^1([a,b])$, $q, f \in C([a,b])$ e $u \in C^2([a,b])$ è una soluzione in senso classica dell'equazione differenziale allora è anche una soluzione debole, come si può vedere integrando per parti.*

3. *In generale, se f, p, q non sono regolari, una soluzione debole u non sarà di classe C^2: ad esempio, $u(x) = \dfrac{x(1-|x|)}{2}$ risolve $\begin{cases} -u''(x) = \text{segno}(x) & x \in (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$.*

4. *Se il problema ha condizioni al bordo non omogenee del tipo $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a,b) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$ ci si può ricondurre al caso $\alpha = \beta = 0$, purché $p \in W^{1,1}((a,b))$, scrivendo $u(x) = v(x) + \dfrac{(\alpha-\beta)x + \beta a - \alpha b}{b-a}$, con v soluzione di $\begin{cases} (-pv')' + qv = \widetilde{f} & \text{su } (a,b) \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}$ per $\widetilde{f}(x) := f(x) + \dfrac{\alpha-\beta}{b-a}p'(x) - \dfrac{(\alpha-\beta)x + \beta a - \alpha b}{b-a}q(x)$.*

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty([a,b]), q, f \in L^1([a,b])$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$ e $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ è una soluzione debole del problema $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$. Allora, $u \in W_0^{1,\infty}((a,b))$.
Se poi $p \in W^{1,p}((a,b))$ e $q, f \in L^p([a,b])$ per qualche $p \in [1, +\infty]$, allora $u' \in W^{1,p}((a,b)) \subset C^{0,1-\frac{1}{p}}([a,b])$ e in particolare $u \in C^1([a,b])$.
Se $p \in C^{k+1}([a,b])$ e $q, f \in C^k([a,b])$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora con $u \in C^{k+2}([a,b])$ e in particolare è una soluzione classica.

Dimostrazione.
Per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$ abbiamo $\int_a^b pu'\varphi' = -\int_a^b \varphi(qu-f)$, ma dal Teorema di immersione di Sobolev sappiamo che $u \in L^\infty([a,b])$ e dunque $qu-f \in L^1([a,b])$; quindi abbiamo $pu' \in W^{1,1}((a,b))$ e in particolare $pu' \in L^\infty([a,b])$, e dal corollario precedente anche $u' = \frac{1}{p}pu' \in L^\infty([a,b])$, cioè $W^{1,\infty}((a,b))$. Assumendo poi $q,f \in L^p([a,b])$, ragionando come prima otteniamo $(pu')' = qu-f \in L^p([a,b])$; essendo $p \in W^{1,p}((a,b)$, dal corollario precedente avremo anche $\frac{1}{p} \in W^{1,p}((a,b))$ e $u' = \frac{1}{p}pu' \in W^{1,p}((a,b))$.
Dimostriamo l'ultima affermazione ragionando per induzione: essendo $u \in C([a,b])$ per il Teorema di immersione di Sobolev, se $q,f \in C([a,b])$ allora $(pu')' = qu-f \in C([a,b])$ e, supponendo anche $p' \in C([a,b])$, si ottiene $u' = \frac{1}{p}pu' \in C^1([a,b])$, dunque abbiamo dimostrato il caso $k=0$. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per $k-1$ e dimostriamola per k: $p \in C^{k+1}([a,b])$ e $q,f \in C^k([a,b])$, allora in particolare $p \in C^k([a,b])$ e $q,f \in C^{k-1}([a,b])$ e dunque per ipotesi induttiva $u \in C^{k+1}([a,b])$; allora, ragionando come prima, $(pu')' = qu-f \in C^k([a,b])$ e dunque $u' \in C^{k+1}([a,b])$. □

Osservazione.
Anche se la nozione di soluzione debole coincide con quella classica, sotto le opportune ipotesi di regolarità per p,q,f che abbiamo fatto in precedenza, le soluzioni non possono essere trovate con i metodi visti per i problemi di Cauchy del tipo $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u'(a) = 0 \end{cases}$*, perché nel nostro caso le condizioni al bordo sono su due punti diversi.*

L'utilità della nuova nozione di soluzioni deboli segue dal fatto che possono essere trovate <u>variazionalmente</u>, cioè come punti critici di un opportuno funzionale definito su $W_0^{1,2}((a,b))$.

Lemma.
Siano $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, $p \in L^\infty([a,b]), q,f \in L^1([a,b])$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$, e $F : W_0^{1,2}((a,b)) \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) := \int_a^b \left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2 - fu\right).$$

Se $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ è un punto di minimo per F, cioè $F(u) \leq F(w)$ per ogni $v \in W_0^{1,2}((a,b))$, allora u è soluzione debole di $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, dalle assunzioni su p,q,f segue che F è ben definito. Inoltre, se u è un punto di minimo per F, allora per ogni $\varphi \in C_0^1((a,b))$ fissato la mappa $g : t \mapsto g(t) = F(u+t\varphi)$ ha un punto di minimo in $t=0$; scrivendo

$$g(t) = \int_a^b \left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2 - fu\right) + t\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi) + t^2\int_a^b \left(\frac{p}{2}\varphi'^2 + \frac{q}{2}\varphi^2\right),$$

allora otteniamo $0 = g'(0) = \int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi)$. □

Esempio.
Nel caso $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, la soluzione di $\begin{cases} -u'' = f & su\ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ *è data da una doppia primitiva di $-f$ con l'aggiunta di una funzione affine che annulli le condizioni al bordo, cioè*

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^y f\right) \mathrm{d}y - \int_a^x \left(\int_a^y f\right) \mathrm{d}y.$$

Lemma.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $W_0^{1,2}((a,b))$.
Allora u_n ha un'estratta che converge debolmente a u in $W_0^{1,2}((a,b))$ e converge a u anche in $L^\infty([a,b])$.

Dimostrazione.
Se $\{u_n\}$ è limitata in $W_0^{1,2}((a,b))$, dal Teorema di Banach-Alaoglu avrà un'estratta debolmente* convergente; essendo $W_0^{1,2}((a,b))$ riflessivo, in quanto è uno spazio di Hilbert, l'estratta di u_n convergerà anche debolmente a $u \in W_0^{1,2}((a,b))$. Applicando il Teorema di immersione di Sobolev, dalla limitatezza in $W_0^{1,2}((a,b))$ di $\{u_n\}$ otteniamo anche un'estratta convergente a qualche v in $L^\infty([a,b])$. Per concludere rimane da verificare che $u = v$: per vederlo, osserviamo che per ogni $f \in L^1([a,b])$ il funzionale $u \mapsto \displaystyle\int_a^b uf$ è lineare e continuo su $W_0^{1,2}((a,b))$, e dunque dalla convergenza debole seguirà che

$$\int_a^b u_n f \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b uf,$$

cioè che $u \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} u$ in $L^\infty([a,b])$; del resto, poiché $u \underset{n\to+\infty}{\to} v$ in $L^\infty([a,b])$ allora $u \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} v$ in $L^\infty([a,b])$ dovrà essere $u = v$. □

Teorema (Esistenza e unicità di soluzioni deboli)**.**
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty([a,b]), q, f \in L^1([a,b])$ con $q \geq 0$ e $p \geq \delta > 0$ e F come nel Lemma precedente.
Allora, F ammette un punto di minimo, che è l'unica soluzione debole di $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \textit{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto, F è limitato dal basso perché, considerando su $W_0^{1,2}((a,b))$ la norma data da $\|u\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))} := \displaystyle\int_a^b \big(pu'^2 + qu^2\big)$, si ottiene:

$$F(u) \geq \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))}}{2} - \|f\|_{L^1([a,b])}\|u\|_{L^\infty([a,b])} \geq \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}((a,b))}}{2} - \|f\|_{L^1([a,b])}\|u\|_{W_0^{1,2}((a,b))} \geq -C.$$

Sia ora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante, cioè tale che $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \inf_{W_0^{1,2}((a,b))} F$; dovrà essere limitata, perché ragionando come prima si otterrebbe che $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ se $\|u_n\|_{W_0^{1,2}((a,b))} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
Essendo $\{u_n\}$ limitata, dal lemma precedente avrà un estratta convergente a u debolmente e in $L^\infty([a,b])$, dunque $\displaystyle\int_a^b fu_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b fu$, e poiché la norma è inferiormente semi-continua rispetto alla convergenza debole avremo $\displaystyle\int_a^b \big(pu'^2 + qu^2\big) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b \big(pu_n'^2 + qu_n^2\big)$; dunque, poiché u_n minimizza F,

$$F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{W_0^{1,2}((a,b))} F \leq F(u),$$

cioè u è un punto di minimo per F e quindi, per il lemma precedente, è soluzione debole dell'equazione differenziale.
Mostriamo infine l'unicità della soluzione: se esistessero due soluzioni $u, v \in W_0^{1,2}((a,b))$, allora dall'osservazione precedente avremmo $\displaystyle\int_a^b (p(u'-v')w' + q(u-v)w) = 0$ per ogni $w \in W_0^{1,2}((a,b))$; pertanto, scegliendo $w = u - v$ otteniamo $\displaystyle\int_a^b \big(p(u'-v')^2 + q(u-v)^2\big) = 0$, cioè $u = v$. □

Osservazione.

1. *L'esistenza e l'unicità delle soluzioni deboli può essere dimostrata equivalentemente utilizzando il teorema di Riesz-Fréchet su $W_0^{1,2}((a,b))$ con il prodotto scalare $(u,v)_{W_0^{1,2}((a,b))} = \int_a^b (pu'v' + quv)$: infatti, grazie al Teorema di immersione di Sobolev il funzionale lineare $v \mapsto \int_a^b fv$ è lineare e continuo su $W_0^{1,2}((a,b))$ per ogni $f \in L^1([a,b])$, dunque esisterà un unico $u \in W_0^{1,2}((a,b))$ tale che, per ogni $v \in W_0^{1,2}((a,b))$,*

$$\int_a^b fv = (u,v)_{W_0^{1,2}((a,b))} = \int_a^b (pu'v' + quv).$$

2. *La precedente dimostrazione del lemma esistenza di soluzioni deboli si può tuttavia utilizzare per una classe molto più ampia di funzionali, del tipo*

$$F(u) = \int_a^b (A(x,u'(x)) + V(x,u(x)))\mathrm{d}x,$$

con $A, V \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$ che verifichino

$$\frac{t^2}{C} \le A(x,t) \le Ct^2 \qquad\qquad V(x,t) \ge -C\,(1+|t|^q) \quad q < 2.$$

Infatti, la limitatezza dal basso di F e la limitatezza delle soluzioni minimizzanti seguono da $q < 2$, mentre la semicontinuità inferiore segue dalla regolarità di A, V; la soluzione sarà unica assumendo inoltre A, V convesse in t per ogni x fissato. I punti di minimo di F saranno soluzioni deboli di

$$\begin{cases} (-\partial_t A(x,u(x)))' + \partial_t V(x,u(x)) = 0 & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\int_a^b (\partial_t A(x,u'(x))\varphi'(x) + \partial_t V(x,u(x))\varphi(x))\mathrm{d}x = 0, \qquad\qquad \forall\, \varphi \in C_0^1((a,b))$$

Per concludere la parte sugli spazi di Sobolev consideriamo gli operatori lineari associati alla risoluzione in forma debole di queste equazioni differenziali.

Proposizione.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $p \in L^\infty([a,b]), q \in L^1([a,b]), f \in L^2([a,b])$ con $q \ge 0$ e $p \ge \delta > 0$ e $\widetilde{A} : L^2([a,b]) \to W_0^{1,2}((a,b))$ la mappa che manda f nell'unico minimo del funzionale F definito in precedenza.
Allora, $\widetilde{A}$ è un operatore lineare continuo e iniettivo.
Inoltre, se $i : W_0^{1,2}((a,b)) \hookrightarrow L^2([a,b])$ è l'inclusione, allora $A := i \circ \widetilde{A} : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ è un operatore lineare <u>compatto</u> e iniettivo e verifica

$$\begin{aligned} (Af,g)_{L^2([a,b])} = (Ag,f)_{L^2([a,b])} \qquad & \forall\, f,g \in L^2([a,b]) \\ (Af,f)_{L^2([a,b])} > 0 \qquad & \forall\, f \in L^2([a,b]) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione.
Innanzi tutto, $\widetilde{A}$ e A sono ben definiti per il Teorema di esistenza e unicità di soluzioni deboli. La linearità e l'iniettività di $\widetilde{A}$ e A seguono anch'esse facilmente dall'unicità delle soluzioni deboli.
Per mostrare la continuità di $\widetilde{A}$, per ogni $v \in W_0^{1,2}((a,b))$ abbiamo

$$\int_a^b \left(p\left(\widetilde{A}f\right)' v' + q\left(\widetilde{A}f\right) v \right) = \int_a^b fv,$$

quindi prendendo $v = \widetilde{A}f$ e applicando la Disuguaglianza di Poincaré si ottiene

$$\left\|\widetilde{A}f\right\|^2_{W^{1,2}_0((a,b))} = \int_a^b f\left(\widetilde{A}f\right) \leq \|f\|_{L^2([a,b])}\left\|\widetilde{A}f\right\|_{L^2([a,b])} \leq C\|f\|_{L^2([a,b])}\left\|\widetilde{A}f\right\|_{W^{1,2}_0((a,b))},$$

dove la norma equivalente considerata è $\|u\|^2_{W^{1,2}_0((a,b))} := \displaystyle\int_a^b \left(pu'^2 + qu^2\right)$, e cioè $\left\|\widetilde{A}f\right\|_{W^{1,2}((a,b))} \leq C\|f\|_{L^2([a,b])}$. La compattezza di A segue dalla continuità di $\widetilde{A}$ e dalla compattezza di i.
Per mostrare la simmetria, fissate f e g applichiamo la definizione di soluzione debole per $\widetilde{A}f$ scegliendo $\varphi = \widetilde{A}g$ e poi scambiamo i ruoli di f, g:

$$\int_a^b f\left(\widetilde{A}g\right) = \int_a^b \left(p\left(\widetilde{A}f\right)'\left(\widetilde{A}g\right)' + q\left(\widetilde{A}f\right)\left(\widetilde{A}g\right)\right) = \int_a^b g\left(\widetilde{A}f\right),$$

dunque

$$(Af, g)_{L^2([a,b])} = \int_a^b g\left(\widetilde{A}f\right) = \int_a^b f\left(\widetilde{A}g\right) = (Ag, f)_{L^2([a,b])}.$$

Infine, scegliendo $v = \widetilde{A}f$ per $f \not\equiv 0$,

$$(Af, f)_{L^2([a,b])} = \int_a^b f\left(\widetilde{A}f\right) = \int_a^b \left(p\left(\widetilde{A}f\right)'^2 + q\left(\widetilde{A}f\right)^2\right) > 0$$

□

Osservazione.
Analogamente si può dimostrare che la restrizione di $\widetilde{A}$ a $W^{1,2}_0((a,b))$ è un operatore compatto: infatti, se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $W^{1,2}_0((a,b))$, allora convergerà a u in $L^2([a,b])$ a meno di estratte e dunque, ragionando come prima,

$$\left\|\widetilde{A}u_n - \widetilde{A}u\right\|_{W^{1,2}_0((a,b))} \leq C\|u_n - u\|_{L^2([a,b])} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

Inoltre, considerando il prodotto scalare $\displaystyle\int_a^b (pu'v' + quv)$ su $W^{1,2}((a,b))$, otteniamo analoghe proprietà di simmetria e positività:

$$\left(\widetilde{A}u, v\right) = \int_a^b uv = \left(\widetilde{A}v, u\right) \qquad \forall\, u, v \in W^{1,2}_0((a,b))$$

$$\left(\widetilde{A}u, u\right) = \int_a^b u^2 > 0 \qquad \forall\, u \in W^{1,2}_0((a,b)) \setminus \{0\}.$$