AM450 - II prova di esonero - 10/06/2019

Esercizio 1 (10 punti).
Siano X, Y spazi normati, $Z \subset X$ un sottoinsieme denso e $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una successione limitata.

1. *(3 punti) Dimostrare che, se $A_n z \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $z \in Z$ allora $A_n x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $x \in X$.*
2. *(4 punti) Sia ora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_2$. Dimostrare che $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ se e solo se valgono entrambe le seguenti affermazioni:*
$$\{x_n\} \text{ è limitata} \qquad\qquad x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
3. *(3 punti) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da $x_n(k) = \begin{cases} k & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:*
$$\{x_n\} \text{ è limitata?} \qquad\qquad x_n(k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}? \qquad\qquad x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0?$$

Esercizio 2 (10 punti).
Sia $f \in L^{\frac{4}{3}}((0,1))$ e $F : W_0^{1,4}((0,1)) \to \mathbb{R}$ definita da
$$F(u) = \int_0^1 \left(\frac{u'^4}{4} - fu\right).$$

1. *(3 punti) Dimostrare, utilizzando la disuguaglianza di Poincaré, che F è limitato dal basso e che i suoi sottolivelli $\left\{u \in W_0^{1,4}((0,1)) : F(u) \le C\right\}$ sono limitati per ogni $C \in \mathbb{R}$.*
2. *(2 punti) Dimostrare che se $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \inf\limits_{W_0^{1,4}((0,1))} F$ allora $\{u_n\}$ ha un'estratta convergente debolmente* in $W^{1,4}((0,1))$ e convergente in norma in $L^4((0,1))$.*
3. *(2 punti) Sia u il limite dato dal punto precedente. Dimostrare che $F(u) \le \liminf\limits_{n\to+\infty} F(u_n)$ e dedurne che u è un punto di minimo per F.*
4. *(3 punti) Dimostrare che per ogni $\varphi \in C_0^1((0,1))$ vale la formula*
$$\int_0^1 u'^3\varphi' = \int_0^1 f\varphi.$$

Esercizio 3 (10 punti).
Sia $\Sigma \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme limitato, $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ denso e numerabile e $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ definito da $Ax(k) = \lambda_k x(k)$.

1. *(3 punti) Dimostrare che λ_n è un autovalore di A per ogni $n \in \mathbb{N}$ e calcolarne esplicitamente il relativo autospazio.*
2. *(3 punti) Dimostrare che se $\lambda \in \Sigma \setminus \Lambda$ allora è nello spettro continuo di A, e quindi $\Sigma \subset \sigma(A)$.* (Suggerimento: usare una nota proprietà dello spettro per ottenere $\lambda \in \sigma(A)$; ricordare inoltre $c_{00} \subset \ell_2$ è denso.)
3. *(4 punti) Fissato $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, scrivere esplicitamente $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ e dimostrare che $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\ell_2)$, e quindi $\sigma(A) = \Sigma$.*