AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi su Uniforme limitatezza, Teoremi della mappa aperta e del grafico chiuso

Esercizio 1.
Sia $X = c_{00}$ lo spazio delle successioni infinitesime

$$X := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists\, K \in \mathbb{N} : x(k) = 0 \quad \forall\, k \geq K\},$$

sia $\|\cdot\|$ una qualsiasi norma su X e, per $n \in \mathbb{N}$, sia $L_n \in X^*$ definito da $L_n x = n\|e_n\|x(n)$.

1. *Dimostrare che $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |L_n x| < +\infty$ per ogni $x \in X$ ma $\|L_n\|_{X^*} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.*

Soluzione *Preso $x \in X$, se $K \in \mathbb{N}$ è tale che $x(k) = 0$ per $k > K$ allora $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |L_n x| = \max\{\|e_1\||x(1)|, \dots, K\|e_K\||x(K)|\} < +\infty$ perché è il massimo tra un numero finito di valori; inoltre, prendendo $x_n = \dfrac{e_n}{\|e_n\|}$ avremo $\|x_n\| = 1$ e $\|L_n\| \geq L_n x_n = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.*

2. *Dedurre che X non è uno spazio di Banach per nessuna scelta di $\|\cdot\|$.*

Soluzione *Se X fosse uno spazio di Banach per una qualche $\|\cdot\|$, allora $\{L_n\} \subset X^*$ sarebbe una famiglia di funzionali lineari continui puntualmente limitata su X ma illimitata in norma, in contraddizione con il Teorema di Banach-Steinhaus.*

Esercizio 2.
Sia $X = C\left(\mathbb{S}^1\right) := \{f \in C([-\pi, \pi]) : f(\pi) = f(-\pi)\}$ e, per $N \in \mathbb{N}$, $L_N \in X^*$ dato da

$$L_N : f \mapsto S_N f(0), \qquad\qquad S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin \frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

1. *Utilizzando il fatto che $\|L_N\|_{X^*} \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty$, dimostrare che il sottoinsieme $Z \subset X$ dato da*

$$Z_0 := \left\{ f \in X : \sup_{N\in\mathbb{N}} |L_N f| = +\infty \right\}$$

è intersezione numerabile di aperti densi ed è esso stesso denso in X.

Soluzione *Se Z_0, per assurdo, non fosse intersezione di aperti densi, allora $X \backslash Z_0 = \left\{ f \in X : \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} |L_N f| \underset{N\to+\infty}{<} +\infty \right\}$ non sarebbe unione numerabile di chiusi con interno vuoto, cioè sarebbe di seconda categoria in X. Allora, essendo L_N puntualmente limitato in $X \setminus Z_0$, per il Teorema di Banach-Steinhaus L_N sarebbe limitato in norma, il che è in contraddizione con le ipotesi. Infine, essendo X uno spazio metrico completo, per il Teorema di Baire sarà di seconda categoria; dunque Z_0, in quanto intersezione di aperti densi, sarà denso.*

2. *Sia ora, per $q \in \mathbb{Q} \in [0,1]$, $L_{N,q} \in X^*$ definito da $L_{N,q}f = S_N f(q)$. Dimostrare che $\|L_{N,q}\|_{X^*} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ e che*

$$Z_q := \left\{ f \in X : \sup_{N\in\mathbb{N}} |L_{N,q}f| = +\infty \right\}$$

è intersezione numerabile di aperti densi e denso in X.

Soluzione *Essendo $L_{N,q}f = S_N f(q) = L_N(f(q-\cdot))$, allora $\|L_{N,q}\|_{X^*} = \|L_N\|_{\underset{N}{\to}+\infty} \to +\infty$. Dunque si può ragionare come nel punto precedente e concludere che, se Z_q non fosse intersezione numerabile di aperti densi, $L_{N,q}$ sarebbe puntualmente limitato sul suo complementare che è di seconda categoria, contraddicendo così il Teorema di Banach-Steinhaus; analogamente, per il Teorema di Baire Z_q sarà denso in quanto intersezione di aperti densi.*

3. *Dedurre che l'insieme $Z = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} Z_q$ è un sottoinsieme denso di X e il sottoinsieme $Y \subset [0,1]$ dato da*

$$Y := \left\{ x \in [0,1] : \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N f(x)| = +\infty, \forall f \in Z \right\}$$

è denso in $[0,1]$.

Soluzione *Innanzi tutto, poiché ogni Z_q è intersezione numerabile di aperti, avremo $Z_q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,q}$ con $A_{n,q}$ aperto in X per ogni n, q; dunque, $Z = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\, n\in\mathbb{N}} A_{n,q}$ è anch'esso intersezione numerabile di aperti e, per il Teorema di Baire, esso stesso aperto. Inoltre, per ogni $f \in Z$, avremo $\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_N f(q)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_{N,q}f| = +\infty$ per ogni $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, cioè $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Y$; essendo $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ denso in $[0,1]$, concludiamo che anche Y sarà denso.*

Esercizio 3.
Sia X uno spazio normato e $E \subset X$ un sottospazio lineare, e sia $r : X^* \to E^*$ data da $r(L) = L|_{E^*}$.

1. *Calcolare $\|r\|_{\mathcal{L}(X^*,E^*)}$.*

Soluzione *Verifichiamo che $\|r\| = 1$: se $\|L\|_{X^*} \le 1$, allora $|Lx| \le 1$ per ogni $x \in X$ con $\|x\| \le 1$; questo è valido in particolare per $x \in E$ con $\|x\| \le 1$, dunque $\|r(L)\|_{E^*} = \|L\|_{E^*} = 1$, pertanto $\|r\| := \sup_{\|L\|\le 1} \|r(L)\| \le 1$. Per dimostrare che vale l'uguaglianza, prendiamo $L_0 \in E^* \setminus \{0\}$ ed estendiamolo a $\widetilde{L}_0 \in X^*$ con il Teorema di Hahn-Banach; $\widetilde{L}_0$ verifica $r\left(\widetilde{L}_0\right) = L_0$ e $\left\|\widetilde{L}_0\right\|_{X^*} = \|L_0\|_{E^*} = \left\|r\left(\widetilde{L}_0\right)\right\|_{X^*}$, dunque $\|r\| \ge \frac{\left\|r\left(\widetilde{L}_0\right)\right\|_{X^*}}{\left\|\widetilde{L}_0\right\|_{X^*}} = 1$.*

2. *Dimostrare che r è iniettiva se e solo se E è denso in X.*

Soluzione *Come è stato già visto a lezione, E è denso se e solo se l'unico $L \in X^*$ che verifica $Lx = 0$ per ogni $x \in E$ è $L = 0 \in X^*$, ma questo equivale a dire che $r(L) = 0$; dunque, E è denso se e solo se l'unico L per cui $r(L) = 0$ è $L = 0$, cioè se e solo se r è iniettiva.*

3. *Dimostrare che r è suriettiva e aperta.*

Soluzione *r è suriettiva perché, dal Teorema di Hahn-Banach, per ogni $L \in E^*$ esiste $\widetilde{L} \in X^*$ tale che $\widetilde{L}|E = L$, cioè $r\left(\widetilde{L}\right) = L$; inoltre, r è aperta per il Teorema della mappa aperta, che può essere applicato in quanto sia X^* che E^* sono sempre spazi di Banach.*

Esercizio 4.
Una funzione $f \in C([0,1])$ si dice Hölderiana di esponente $\alpha \in (0,1]$ se esiste $C > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \qquad \forall x, y \in [0,1].$$

1. *Dimostrare che f è Hölderiana di qualche esponente α se e solo se $f \in A_n$ per qualche N, dove*
$$A_N := \left\{ f \in C([0,1]) : |f(x) - f(y)| \leq N|x-y|^{\frac{1}{N}}, \forall x, y \in [0,1] \right\}.$$

Soluzione *Se $f \in A_n$ allora è Hölderiana di esponente $\alpha = \dfrac{1}{N}$ con costante $C = \dfrac{1}{N}$; viceversa, se f è Hölderiana di esponente α, allora scegliendo $N \in \mathbb{N}$ che verifichi $\dfrac{1}{N} \leq \alpha$ e $2C \leq N$ si ottiene, per ogni $x, y \in [0,1]$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\frac{1}{N}}|x-y|^{\alpha - \frac{1}{N}} \leq C|x-y|^{\frac{1}{N}} 2^{\alpha - \frac{1}{N}} \leq 2C|x-y|^{\frac{1}{N}} \leq N|x-y|^{\frac{1}{N}},$$

ovvero $f \in A_N$.

2. *Sia ora N fissato, $f \in A_N$ e $g \in C([0,1])$ non Hölderiana; dimostrare che la successione $f_n := f + \dfrac{g}{n}$ converge a f in $C([0,1])$ e dedurne che gli A_N hanno interno vuoto.*

Soluzione *La successione f_n verifica $\|f_n - f\| = \dfrac{\|g\|}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dunque $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$; ciò implica che ogni intorno di f contiene un qualche f_n, ma $f_n \notin A_N$ per nessun n, perché altrimenti g verificherebbe*

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |nf_n(x) - f(x) - nf_n(y) + f(y)| \\ &\leq n|f_n(x) - f_n(y)| + |f(x) - f(y)| \\ &\leq (n+1)N|x-y|^{\frac{1}{N}}, \end{aligned}$$

quindi sarebbe Hölderiana, in contraddizione con le ipotesi. Essendo f arbitraria, concludiamo che ciascun A_N ha interno vuoto.

3. *Dimostrare che gli A_N sono chiusi e dedurne che le lo spazio delle funzioni Hölderiane è di prima categoria in $C([0,1])$.*

Soluzione *Prendiamo una successione $\{f_n\}$ in A_N che converga a f in $C([0,1])$; ciò implica che $|f_n(x) - f_n(y)| \underset{n\to+\infty}{\to} |f(x) - f(y)|$ per ogni $x, y \in [0,1]$, dunque*

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq N|x-y|^{\frac{1}{N}},$$

cioè $f \in A_N$ e quindi A_N è chiuso. Dunque, lo spazio delle funzioni Hölderiane è unione numerabile degli A_N, che sono chiusi con interno vuoto, e quindi è di prima categoria.

Esercizio 5.
Sia H uno spazio di Hilbert separabile, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale completo su H, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione positiva e infinitesima e $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ dato da

$$A : \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n c_n e_n.$$

1. *Dimostrare che $e_n \in \operatorname{ran}(A)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dedurre che $\operatorname{ran}(A)$ è denso in H.*

Soluzione *$e_n = A(a_n e_n)$, dunque $e_n \in \operatorname{ran}(A)$; inoltre, essendo $\operatorname{ran}(A)$ un sottospazio vettoriale, conterrà $\operatorname{Span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che è denso in H perché $\{e_n\}$ è un sistema ortonornale completo, e dunque anche $\operatorname{ran}(A)$ è denso.*

2. *Dimostrare che A è iniettivo ma non suriettivo.*

Soluzione *Prendiamo $x \in \ker(A)$, cioè tale che $Ax = 0$; scrivendo $x = \sum_{m\in\mathbb{N}} c_m e_m$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ avremo*

$$0 = (Ax, e_n) = \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m c_m e_m, e_n \right) = a_n c_n.$$

Poiché $a_n \neq 0$, l'uguaglianza sarà possibile solo se $c_n = 0$ per ogni n, cioè se $x = 0$; dunque, $\ker(A) = \{0\}$ e cioè A è iniettivo. Per mostrare che A non è suriettivo, osserviamo che applicando la formula di Parseval si ottiene $\|Ax\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^2 a_n^2$ se $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n$; dunque, scegliendo b_n tale che $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < +\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n^2}{a_n^2}$, otterremo che $x := \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n e_n \in H$ perché $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < +\infty$ ma $x \notin \operatorname{ran}(A)$.

3. *Determinare esplicitamente l'operatore inverso sinistro $B : \operatorname{ran}(A) \to \ell_2$ tale che $B \circ A = \mathbb{I}_H$ e dimostrare che non è continuo; dire perché non è in contraddizione con quanto visto a lezione.*

Soluzione *Innanzi tutto, per determinare l'inverso sinistro di B, sarà sufficiente definire Be_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ e successivamente estendere B per linearità a $\operatorname{Span}\{e_n\}$ e per densità all'intero H. Poiché, come abbiamo visto, $e_n = A(a_n e_n)$, allora ponendo $Be_n = \frac{e_n}{a_n}$ otterremo $BAe_n = e_n$; dunque per definire B sull'intero spazio sarà sufficiente porre*

$$B : \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{a_n} e_n.$$

Questo operatore non è continuo perché

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\operatorname{ran}(A),\ell_2)} \geq |Be_n| = \frac{1}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty;$$

questo risultato non contraddice quanto visto a lezione perché $\operatorname{ran}(A)$ non è chiuso in H, in quanto suo sottoinsieme denso proprio, e dunque pur essendo A suriettivo non è garantita l'esistenza di un inverso sinistro continuo.