AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Esercizi sul Teorema di Hahn-Banach

Esercizio 1.
Sia H uno spazio di Hilbert, $E \lhd H$ e $L \in E^* \setminus \{0\}$. Fissati $x_0 \in E^\perp$ tale che $\|x_0\| = 1$ e $c \in \mathbb{R}$, definiamo $\widetilde{L} \in \mathrm{Span}\{E, x_0\}^*$ come

$$\widetilde{L}(x + tx_0) = Lx + ct.$$

1. *Fissato $x \in E$ per cui $Lx \neq 0$, trovare il valore massimo di $t \mapsto \dfrac{\left(\widetilde{L}(x+tx_0)\right)^2}{\|x+tx_0\|^2}$.*
2. *Dimostrare che se $c \neq 0$ allora $\left\|\widetilde{L}\right\| > \|L\|$ e dedurne che esiste un'unica estensione di L a H che ne preservi la norma.*

Esercizio 2.
Sia X uno spazio normato e siano A, B convessi con interno disgiunto.

1. *Utilizzando risultati visti a lezione, dimostrare che $\mathring{A}$ e $\mathring{B}$ sono separati da un iperpiano chiuso.*
2. *Dimostrare che A e B sono separati da un iperpiano chiuso.*

Esercizio 3.
Sia X uno spazio normato, $K \subset X$ chiuso convesso e H_K l'intersezione di tutti i semi-spazi chiusi contenenti K, ovvero:

$$H_K := \bigcap_{(L,\alpha)\in\mathcal{A}} \{L \geq \alpha\}, \qquad \mathcal{A} := \{(L,\alpha) \in X^* \times \mathbb{R} : Lx \geq \alpha \,\forall x \in K\}.$$

1. *Dimostrare che, se $x_0 \notin K$ allora esiste $(L,\alpha) \in \mathcal{A}$ per cui $x_0 \notin \{L \geq \alpha\}$.*
2. *Utilizzando il punto precedente dimostrare che $K = H_K$.*
3. *Dimostrare che, per un generico $Y \subset X$, H_Y coincide con la chiusura dell'inviluppo convesso di Y, ovvero:*

$$\overline{\mathrm{conv}(Y)} = \bigcap_{K\in\mathcal{K}} K, \qquad \mathcal{K} = \{K \subset X : K \text{ chiuso convesso tale che } Y \subset K\}.$$

Esercizio 4.
Sia $X = \ell_1$ e $L \in X^*$ definito da

$$Lx(k) := \left(1 - \frac{1}{k}\right) x(k).$$

1. *Calcolare* $\|L\|_{X^*}$ *e dimostrare che per ogni* $x \in X$ *tale che* $\|x\|_X = 1$ *vale la disuguaglianza stretta* $Lx < \|L\|_{X^*}$.
2. *Utilizzando il punto precedente e un corollario del Teorema di Hahn-Banach, dimostrare che* ℓ_1 *non è uno spazio riflessivo.*

Esercizio 5.
Sia $X = L^1([0,1])$ *e* $F \lhd X^*$ *definito da:*

$$F := \left\{ L : f \mapsto \int_0^1 fg \, : \, g \in C([0,1]) \right\}.$$

1. *Determinare esplicitamente l'ortogonale di* F *in* X^**, ovvero:*

$$F^\perp := \left\{ f \in X \, : \, \int_0^1 fg = 0, \, \forall g \in C([0,1]) \right\}.$$

2. *Dire se vale* $F = F^{\perp\perp}$ *e confrontare con quanto visto a lezione.*