AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi su spazi di Hilbert

Esercizio 1.
Sia $H := L^2((-1,1))$ e siano P, D i sottospazi delle funzioni rispettivamente pari e dispari:

$$\begin{aligned} P &:= \{f \in H : f(x) = f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1,1)\}, \\ D &:= \{f \in H : f(x) = -f(-x) \text{ per q.o. } x \in (-1,1)\}. \end{aligned}$$

1. *Dimostrare che $D \subset P^\perp$, dove l'ortogonalità è intesa rispetto al prodotto scalare $(f,g) := \int_{-1}^1 fg$.*

Soluzione: *Se $f \in D$, allora per ogni $g \in P$ vale*

$$\begin{aligned} (f,g) &= \int_{-1}^0 f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^0 (-f(-x))g(-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 f(y)g(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= 0, \end{aligned}$$

dunque $f \in P^\perp$.

2. *Fissata $f \in H \setminus D$, trovare $g \in P$ tale che $f \not\perp g$ e dedurne che $D = P^\perp$.*

Soluzione: *Se $f \notin D$, allora $f(x) \neq -f(-x)$ su un insieme A di misura positiva; scrivendo*

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \qquad A_n := \left\{x \in (-1,1) : |f(x) + f(-x)| \geq \frac{1}{n}\right\},$$

avremo $\mu(A_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \mu(A) > 0$, dunque $\mu(A_{n_0}) > 0$ per qualche n_0. Inoltre, a meno di cambiare segno a f, possiamo supporre che abbia misura positiva l'insieme

$$B_0 := \left\{x \in A_{n_0} : f(x) + f(-x) \geq \frac{1}{n_0}\right\};$$

pertanto, scegliendo $g = \chi_{B_0} + \chi_{-B_0} \in P$, avremo

$$(f,g) = \int_{B_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-B_0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{B_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{B_0} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{B_0} (f(x) + f(-x))\mathrm{d}x \geq \frac{|B_0|}{n_0} > 0,$$

dunque $f \not\perp g$.

3. *Dando per buono che $P \lhd H$ e utilizzando risultati visti a lezione, dimostrare che $P = D^\perp$.*

Soluzione: *Essendo P un sottospazio vettoriale chiuso, avremo $P = P^{\perp\perp}$, ma dal punto precedente sappiamo $P^\perp = D$, e dunque $P = P^{\perp\perp} = D^\perp$. Questo dimostra che $P^\perp \subset D$, dunque mettendo insieme con il punto precedente si ottiene $P^\perp = D$.*

Esercizio 2.
Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura, $H := L^2(\mu)$ il relativo spazio L^2, $h \in H$ fissata e K_h il chiuso convesso definito da

$$K_h := \{f \in H : f(x) \le h(x) \, per \; q.o. \; x \in X\}.$$

1. *Dimostrare che, per ogni $f \in H$, $\min\{f, h\}$ verifica*

$$\int_X (\min\{f, h\} - f)(\min\{f, h\} - g)d\mu \le 0 \qquad\qquad \forall g \in K_h.$$

Soluzione: *Dividiamo l'insieme X in due misurabili, a seconda se f sia maggiore di h oppure no:*

$$X = X_1 \cup X_2, \qquad X_1 := \{x \in X : f(x) \le h(x)\}, \qquad X_2 := \{x \in X : f(x) > h(x)\}.$$

Se $x \in X_1$, avremo $\min\{f, h\} = h$, mentre se $x \in X_2$ avremo $\min\{f, h\} = f$, dunque per ogni $g \in K_h$ avremo

$$\int_X (\min\{f, h\} - f)(\min\{f, h\} - g)d\mu = \int_{X_2} (h - f)(h - g)\mathrm{d}\mu \le 0,$$

in quanto $h - g \le 0$ q.o. su X e $h - f \le 0$ su X_2.

2. *Utilizzando risultati visti a lezione, dimostrare che la proiezione $P : H \to K_h$ è data da $P(f) = \min\{f, h\}$.*

Soluzione: *Dal punto precedente abbiamo visto che $(\min\{f, h\} - f, \min\{f, h\} - g) \le 0$ per ogni $g \in K_h$, dunque poiché sappiamo $P(f)$ è l'unico elemento di K_h che verifica questa disuguaglianza, non potrà che essere $P(f) = \min\{f, h\}$.*

3. *Dimostrare esplicitamente che $\|P(f) - P(g)\| \le \|f - g\|$ per ogni $f, g \in H$.*

Soluzione: *Come nel punto precedente, scriviamo $X = X_1 \cup X_2$ e analogamente scriviamo anche $X = Y_1 \cup Y_2$, dove quest'ultima suddivisione è stata fatta a seconda se g è maggiore di h:*

$$X = Y_1 \cup Y_2, \qquad Y_1 := \{x \in X : g(x) \le h(x)\}, \qquad Y_2 := \{x \in X : g(x) > h(x)\}.$$

Calcoliamo ora $\|P(f) - P(g)\|^2$ suddividendo nelle quattro intersezioni degli X_i e Y_j: ricordando che su $X_1 \cap Y_2$ avremo $g - f \ge h - f \ge 0$ e su $X_2 \cap Y_1$ avremo $f - g \ge h - g \ge 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\|P(f) - P(g)\|^2 &= \int_X (\min\{f, h\} - \min\{g, h\})^2 \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{X_1 \cap Y_2} (h - f)^2 \mathrm{d}\mu + \int_{X_2 \cap Y_1} (h - g)^2 \mathrm{d}\mu + \int_{X_2 \cap X_2} (f - g)^2 \mathrm{d}\mu \\
&\le \int_{X_1 \cap Y_2} (g - f)^2 \mathrm{d}\mu + \int_{X_2 \cap Y_1} (f - g)^2 \mathrm{d}\mu + \int_{X_2 \cap X_2} (f - g)^2 \mathrm{d}\mu \\
&\le \|f - g\|^2;
\end{aligned}$$

pertanto, $\|P(f) - P(g)\| \le \|f - g\|$.

Esercizio 3.
Sia $B \subset \mathbb{R}^N$ la palla unità, $H := L^2(B)$ e sia $E \lhd H$ il sottospazio delle funzioni radiali:

$$E := \{f \in H : f(x) = f(y) \, per \; q.o. \; x, y \in B \; tali \; che \; |x| = |y|\}.$$

1. *Dimostrare che l'ortogonale di E è dato da*

$$E^\perp = \left\{ g \in H : \int_{\{x:\,|x|=r\}} g(x)\mathrm{d}\sigma(x) = 0 \, per\ q.o.\ r \in (0,1) \right\}.$$

Soluzione: Se $\displaystyle\int_{\{x:\,|x|=r\}} g(x)\mathrm{d}\sigma(x) = 0$ *per q.o.* r *e* $f \in E$, *allora*

$$(f,g) = \int_0^1 \left(\int_{\{x:\,|x|=r\}} f(x)g(x)\mathrm{d}\sigma(x) \right) \mathrm{d}r = \int_0^1 f(r) \left(\int_{\{x:\,|x|=r\}} g(x)\mathrm{d}\sigma(x) \right) \mathrm{d}r = 0,$$

e dunque $g \in E^\perp$. *Viceversa, a meno di un segno possiamo supporre che esista* $A \subset (0,1)$ *di misura positiva per cui* $\displaystyle\int_{\{x:\,|x|=r\}} g(x)\mathrm{d}\sigma(x) \geq \delta_0 > 0$ *per ogni* $r \in A$, *quindi prendendo* $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \in A \\ 0 & |x| \notin A \end{cases}$ *avremo* $f \in E$ *e*

$$(f,g) = \int_A \left(\int_{\{x:\,|x|=r\}} g(x)\mathrm{d}\sigma(x) \right) \mathrm{d}r \geq \mathrm{d}_0|A| > 0;$$

dunque, $g \notin E^\perp$ *e l'uguaglianza è dimostrata.*

2. *Dimostrare che per ogni* f *vale*

$$f(x) - \frac{1}{|\{y:\,|y|=|x|\}|} \int_{\{y:\,|y|=|x|\}} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) \in E^\perp.$$

Dedurne una scrittura esplicita per le proiezioni ortogonali $P : H \to E$, $Q : H \to E^\perp$.

Soluzione: Poiché per ogni $r \in (0,1)$ *abbiamo*

$$\begin{aligned} &\int_{\{x:\,|x|=r\}} \left(f(x) - \frac{1}{|\{y:\,|y|=|x|\}|} \int_{\{y:\,|y|=|x|\}} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) \right) \mathrm{d}\sigma(x) \\ = &\int_{\{x:\,|x|=r\}} f(x)\mathrm{d}\sigma(x) - \left(\frac{1}{|\{y:\,|y|=r\}|} \int_{\{y:\,|y|=r\}} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) \right) |\{y:\,|y|=r\}| = 0, \end{aligned}$$

dal punto precedente deduciamo che l'elemento appartiene a $E^\perp$. *Dunque possiamo scrivere, per ogni* $x \in H$,

$$x = \underbrace{\frac{1}{|\{y:\,|y|=|x|\}|} \int_{\{y:\,|y|=|x|\}} f(y)\mathrm{d}\sigma(y)}_{\in E} + \underbrace{f(x) - \frac{1}{|\{y:\,|y|=|x|\}|} \int_{\{y:\,|y|=|x|\}} f(y)\mathrm{d}\sigma(y)}_{\in E^\perp},$$

ma siccome la scrittura in $E + E^\perp$ *è unica, ciascun elemento dovrà coincidere con la rispettiva proiezione ortogonale e cioè:*

$$\begin{aligned} Px : x &\mapsto \frac{1}{|\{y:\,|y|=|x|\}|} \int_{\{y:\,|y|=|x|\}} f(y)\mathrm{d}\sigma(y), \\ Qx : x &\mapsto f(x) - \frac{1}{|\{y:\,|y|=|x|\}|} \int_{\{y:\,|y|=|x|\}} f(y)\mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned}$$

Esercizio 4.
Sia H *uno spazio di Hilbert,* $\{e_1, \ldots, e_N\}$ *un sistema ortonormale su* H *e siano, per* $x \in H$,

$$Px := \sum_{i=1}^{N} (x, e_i)e_i, \qquad Qx := x - Px.$$

1. *Dimostrare, utilizzando la disuguaglianza di Bessel, che $\|Px\| \leq \|x\|$.*

Soluzione: *Dalla disuguaglianza di Bessel si ottiene*

$$\|Px\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)e_i\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{N}(x,e_i)(x,e_j)(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^{N}(x,e_i)^2 \leq \|x\|^2,$$

ovvero $\|Px\| \leq \|x\|$.

2. *Dimostrare che $Qx \perp e_i$ per ogni $x \in H, i = 1,\ldots,N$ e dedurne che P,Q sono le proiezioni ortogonali rispettivamente su $E := \mathrm{Span}\{e_i\}_{i=1,\ldots,N}$ e sul suo ortogonale.*

Soluzione: *Per ogni $x \in X, i = 1,\ldots,N$ abbiamo*

$$(Qx,e_i) = \left(x - \sum_{j=1}^{N}(x,e_j)e_j, e_i\right) = (x,e_i) - \sum_{j=1}^{N}(x,e_j)(e_j,e_i) = (x,e_i) - (x,e_i) = 0;$$

dunque, per linearità, $Qx \in E^\perp$. Per ogni $x \in X$ abbiamo quindi $x = Px + Qx$ con $Px \in E$ e $Qx \in E^\perp$, ma poiché ogni sottospazio lineare chiuso è in somma diretta con il suo ortogonale, la scrittura è unica e quindi P e Q non potranno che coincidere con le proiezioni ortogonali.

Esercizio 5.

Sia $H := L^2([0,1])$ e siano, per $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in H$ definite da:

$$e_n(x) = \sum_{i=1}^{2^n}(-1)^i \chi_{\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right)}(x) = \begin{cases} 1 & \frac{2j}{2^n} \leq x < \frac{2j+1}{2^n} \text{ per qualche } j = 0,\ldots,2^{n-1}+1 \\ -1 & \frac{2j+1}{2^n} \leq x < \frac{2j+2}{2^n} \text{ per qualche } j = 0,\ldots,2^{n-1}+1 \end{cases}$$

1. *Dimostrare che $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale su H.*

Soluzione: *Innanzi tutto, poiché $|e_n(x)| \equiv 1$ per ogni $x \in [0,1]$, avremo $\|e_n\|^2 = \int_0^1 1 = 1$. Mostriamo ora che $(e_n,e_m) = 0$ per $m > n$: siccome e_n, e_m hanno periodo rispettivamente uguale a $\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{m-1}}$, con $\frac{1}{2^{n-1}}$ multiplo intero di $\frac{1}{2^{m-1}}$, il prodotto e_ne_m avrà periodo $\frac{1}{2^{n-1}}$, dunque $(e_n,e_m) = 2^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} e_ne_m$ e quindi basterà far vedere che quest'ultimo integrale si annulla; su questo intervallo avremo $e_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2^n} \\ -1 & \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$, mentre e_m ha periodo $\frac{1}{2^n}$, dunque*

$$\int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} e_ne_m = \int_0^{\frac{1}{2^n}} e_m - \int_{\frac{1}{2^{n-1}}}^{\frac{1}{2^n}} e_m = \int_0^{\frac{1}{2^n}} e_m - \int_0^{\frac{1}{2^n}} e_m = 0.$$

2. *Dimostrare che se $f(1-x) = f(x)$ allora $f \perp e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dedurne che $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è completo.*

Soluzione: *Poiché $e_n(x) = -e_n(1-x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}, x \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, se $f(1-x) = f(x)$ allora*

$$\begin{aligned} (f,e_n) &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)e_n(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)e_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)e_n(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-x)(-e_n(1-x))\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)e_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} f(y)e_n(y)\mathrm{d}y \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dunque, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\perp} \neq \{0\}$ *che, come abbiamo visto a lezione, è equivalente a dire che il sistema non è completo.*