AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Esercizi da svolgere per l'esame

Esercizio 1.
Sia X uno spazio di Banach e $C \subset X$ un sottoinsieme compatto.

1. *Dimostrare che C è di seconda categoria in sé.*
2. *Dimostrare che, se X ha dimensione infinita, C ha interno vuoto.*
3. *Dedurre che, se X ha dimensione infinita, C è di prima categoria in X.*

Esercizio 2.
Siano B_1 e B_2 le palle unità aperte rispettivamente in ℓ_1, ℓ_2, ovvero

$$B_1 := \{x \in \ell_1 : \|x\|_{\ell_1} < 1\}, \qquad B_2 := \{x \in \ell_2 : \|x\|_{\ell_2} < 1\}.$$

1. *Dimostrare, utilizzando una proprietà delle topologie deboli, che B_1 e B_2 hanno interno vuoto nelle rispettive topologie deboli.*
2. *Dire se B_1 è aperto sequenziale nella topologia debole $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$.*
   (Si ricorda che un sottoinsieme A di uno spazio topologico si dice aperto sequenziale se per ogni successione x_n convergente a un punto di A abbiamo $x_n \in A$ definitivamente.)
3. *Dire se B_2 è aperto sequenziale nella topologia debole $\sigma(\ell_2, \ell_2)$.*

Esercizio 3.
Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $X := L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

1. *Dimostrare che, se $Y \subset X^*$ è denso, $\{f_n\}$ è limitata e $Lf_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $L \in Y$, allora $f_n \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$.*
2. *Dimostrare, utilizzando la densità delle funzioni semplici, che $f_n \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ se e solo se valgono entrambe le seguenti:*

$$\{f_n\} \text{ è limitata}; \qquad \int_A f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \forall A \subset \mathbb{R} \text{ misurabile con } \mu(A) < +\infty.$$

3. *Dimostrare, utilizzando un opportuno controesempio, che l'affermazione precedente è falsa per $p = 1$.*

Esercizio 4.
Sia X uno spazio di Banach e $E \subset X$ un suo sottospazio lineare.

1. *Dimostrare che la topologia debole $\sigma(E, E^*)$ coincide con la restrizione della topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

2. *Dimostrare, utilizzando il Teorema di Kakutani, che se E è chiuso e X è riflessivo allora anche E è riflessivo.*

3. *Dimostrare, utilizzando un risultato visto a lezione, che esiste un'isometria suriettiva $\Phi : E^* \to \overline{E}^*$.*

Esercizio 5.
Sia X uno spazio di Banach, $L \in X^*$ con $\|L\|_{X^*} = 1$ e $E := \{L = 0\}$.

1. *Dimostrare che $\mathrm{d}(x, E) \geq |Lx|$ per ogni $x \in X$.*
   (Si ricorda la definizione $\mathrm{d}(x, E) := \inf_{y \in E} \|x - y\|$.)

2. *Dimostrare, osservando che se $Lz \neq 0$ allora $x - \dfrac{Lx}{Lz} z \in E$, che vale in realtà l'uguaglianza $\mathrm{d}(x, E) = |Lx|$.*

3. *Sia ora $X = \ell_1$ e $E := \left\{ x \in X : \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k) \left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = 0 \right\}$. Dimostrare, utilizzando i punti precedenti, che se $x \notin E$ allora $\mathrm{d}(x, E) < \|x - y\|$ per ogni $y \in E$.*

Esercizio 6.
Sia $\varphi_0 \in C_0^1((0,1))$ con $0 \leq \varphi \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$ e $f_n(x) := 1 - \varphi(nx)$

1. *Dimostrare che $\{f_n\}$ converge debolmente in $C([0,1])$ e trovare il suo limite debole f.*
   (Si ricorda che il duale di $C([0,1])$ può essere identificato con le misure con segno su $[0,1]$, per i dettagli vedere il Teorema 4.11 del Testo di H. Brézis)

2. *Calcolare $\|f_n\|_{C([0,1])}, \|f\|_{C([0,1])}, \|f_n - f\|_{C([0,1])}$.*

3. *Dedurre, utilizzando i punti precedenti e un risultato visto a lezione, che $C([0,1])$ <u>non</u> è uno spazio uniformemente convesso.*

Esercizio 7.
Siano X, Y spazi di Banach e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1. *Dimostrare che se A è compatto allora per ogni $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$ in X abbiamo $Ax_n \underset{n \to +\infty}{\to} Ax$ in Y.*

2. *Dimostrare che, se X è riflessivo e per ogni $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$ in X abbiamo $Ax_n \underset{n \to +\infty}{\to} Ax$ in Y, allora A è compatto.*

3. *Dimostrare, utilizzando un opportuno controesempio, che se X non è riflessivo la precedente affermazione non è sempre vera.*

Esercizio 8.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione <u>limitata</u> in $X = L^p([a,b])$ con $1 \leq p < \infty$ e tale che

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \quad |h| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_c^d |u_n(x+h) - u_n(x)|^p \mathrm{d}x \leq \varepsilon^p, \quad \forall [c,d] \subset (a+|h|, b-|h|).$$

Sia, per $M \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(X)$ definito da

$$A_M u(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|I_1|}\displaystyle\int_{I_1} u(y)\mathrm{d}y & x \in I_1 := \left[a, a + \dfrac{b-a}{M}\right) \\ \dots \\ \dfrac{1}{|I_j|}\displaystyle\int_{I_j} u(y)\mathrm{d}y & x \in I_j := \left[a + (j-1)\dfrac{b-a}{M}, a + j\dfrac{b-a}{M}\right) \\ \dots \\ \dfrac{1}{|I_M|}\displaystyle\int_{I_M} u(y)\mathrm{d}y & x \in I_M := \left[a + (M-1)\dfrac{b-a}{M}, b\right) \end{cases}$$

1. *Dimostrare, utilizzando il fatto che* $\operatorname{ran} A$ *ha dimensione finita, che* $\{A_M u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ha un'estratta convergente per ogni* M *fissato.*
2. *Dimostrare, dividendo l'integrale sugli intervalli* $I_1, \dots, I_M$ *e applicando il Teorema di Fubini, che se* δ *è scelto come in precedenza e* $\dfrac{b-a}{M} \leq \delta$ *allora* $\|u_n - A_M u_n\| \leq 2^{\frac{1}{p}}\varepsilon$.
3. *Dimostrare, utilizzando i punti precedenti, che anche* $\{u_n\}$ *ha un'estratta convergente.*
4. *Dimostrare che se* $u \in W^{1,1}((a,b))$ *per* $a, b \in \mathbb{R}$ *allora*

$$\int_c^d |u(x+h) - u(x)|^p \mathrm{d}x \leq (2\|u\|_{L^\infty([a,b])})^{p-1}\|u'\|_{L^1([a,b])}h, \quad \forall [c,d] \subset (a + |h|, b - |h|);$$

dedurne che $W^{1,1}((a,b))$ *si immerge in modo compatto in* $L^p([a,b])$ *se* $1 \leq p < \infty$.

Esercizio 9.
Sia $C^{0,\alpha}([0,1])$ *lo spazio delle funzioni Hölderiane di esponente* α, *con* $0 < \alpha \leq 1$, *munito della norma*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}([0,1])} := \|u\|_\infty + \sup_{x,y\in[0,1], x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

1. *Dimostrare, utilizzando il Teorema di Ascoli-Arzelà, che* $C^{0,\alpha}([0,1])$ *si immerge in maniera compatta in* $C^{0,\beta}([0,1])$ *per ogni* $\beta < \alpha$.
2. *Sia ora* $u_n(x) := \sin(n\pi x)$; *calcolare* $\|u_n\|_{L^1([0,1])}$ *e* $\|u_n\|_{L^\infty([0,1])}$.
3. *Dimostrare, dando per buono che* $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ *in* $L^1([0,1])$, *che l'immersione* $L^\infty([0,1]) \hookrightarrow L^1([0,1])$ *<u>non</u> è compatta.*
4. *Dimostrare, utilizzando il punto precedente, che l'immersione* $L^p([0,1]) \hookrightarrow L^q([0,1])$ *<u>non</u> è mai compatta se* $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Esercizio 10.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$E := \operatorname{Span}\{1, x\} = \{Ax + B;\, A, B \in \mathbb{R}\}$$

lo spazio delle funzioni affini su (a,b).

1. *Dimostrare che per ogni* $u \in W^{1,p}((a,b))$ *con* $1 \leq p \leq \infty$ *esiste un'unica* $v \in E$ *che verifichi* $v(a) = u(a)$ *e* $v(b) = u(b)$.
2. *Dedurre che* $W^{1,p}((a,b)) = W_0^{1,p}((a,b)) \oplus E$ *e scrivere esplicitamente le proiezioni*

$$P : W^{1,p}((a,b)) \to W_0^{1,p}((a,b)) \qquad\qquad Q : W^{1,p}((a,b)) \to E.$$

3. *Siano ora* $a = 0, b = 1, p = 2$ *e* $u(x) = e^x$; *dimostrare che* $\|Qu\| > \|u\|$ *e confrontare con quanto visto a lezione sulle proiezioni negli spazi di Hilbert.*

Esercizio 11.
Sia $f \in L^1([0,1])$, e $F : W_0^{1,p}((0,1)) \to \mathbb{R}$, con $1 < p < \infty$, definita da

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{|u'|^p}{p} - fu \right).$$

1. *Dimostrare, utilizzando la disuguaglianza di Poincaré, che F è limitato dal basso e che i suoi sottolivelli*
$$\left\{ u \in W_0^{1,p}((0,1)) : F(u) \leq c \right\}$$
sono limitati per ogni $c \in \mathbb{R}$.
2. *Dimostrare che, se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \inf\limits_{W_0^{1,p}((0,1))} F$, allora a meno di estratte u_n converge debolmente* in $W^{1,p}((0,1))$ e in norma in $L^\infty((0,1))$.*
3. *Dimostrare che il limite u_0 dato dal punto precedente è di minimo assoluto per F, cioè $F(u_0) = \min\limits_{W_0^{1,p}((0,1))} F$.*
4. *Dimostrare che u_0 soddisfa la condizione*
$$\int_0^1 |u_0'|^{p-2} u_0' \varphi' = \int_0^1 f\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_0^1((0,1)).$$

Esercizio 12.
Sia X uno spazio di Banach complesso e $A \in \mathcal{L}(X)$ tale che $0 \in \sigma(A)$.

1. *Dimostrare, utilizzando un risultato visto a lezione, che se $0 \in \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ allora A <u>non</u> è una mappa aperta.*
2. *Dimostrare, utilizzando opportuni esempi, che se $0 \in \sigma_p(A)$ allora A potrebbe essere una mappa aperta oppure potrebbe non esserlo.*

Esercizio 13.
Sia $X = C([0,1])$ e $A \in \mathcal{L}(X)$ definita da $Af(x) := \int_0^x fg$, per $g \in X$.

1. *Dimostrare che $A \in \mathcal{K}(X)$.*
2. *Dimostrare che $\sigma(A) = \{0\}$ e dire, al variare di g, se 0 appartiene allo spettro puntuale, continuo o residuo.*
3. *Dimostrare che l'operatore aggiunto $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ è dato da*
$$A^* : \mu \mapsto g(x)\mu(1-x)\mathrm{d}x,$$
ovvero la misura avente come densità $g(x)\mu(1-x)$ rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 14.
Sia H uno spazio di Hilbert complesso e $A \in \mathcal{L}(H)$.

1. *Dimostrare che A è un'isometria se e solo se $A^*A = \mathbb{I}_H$.*
2. *Dimostrare che A è un'isometria <u>suriettiva</u> se e solo se $A^*A = AA^* = \mathbb{I}_H$.*
3. *Dimostrare, utilizzando un controesempio visto a lezione, che, anche se $AA^* = \mathbb{I}_H$, A potrebbe non essere un'isometria.*

Esercizio 15.
Sia $H = L^2([0,1], \#)$, *dove* $\#$ *indica la misura che conta,* $g \in L^\infty([0,1], \#)$, *e* $A \in \mathcal{L}(H)$ *dato da* $Af(x) = f(x)g(x)$.

1. *Dimostrare che* $\sigma(A) = \overline{g([0,1])}$.
2. *Determinare gli autovalori di* A *e i rispettivi autospazi.*
3. *Dimostrare che* $A \in \mathcal{K}(H)$ *se e solo se esiste una successione* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *tale che* $g(x) \neq 0$ *se e solo se* $x = a_n$ *per qualche* $n \in \mathbb{N}$ *e* $g(a_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.