AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Esercizi su spazi di Sobolev e teoria spettrale

Esercizio 1.
Siano X, Y *spazi di Banach e* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

1. *Dimostrare che se* A *è compatto allora per ogni* $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ *in* X *abbiamo* $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} Ax$ *in* Y.
2. *Dimostrare che, se* X *è riflessivo e per ogni* $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ *in* X *abbiamo* $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} Ax$ *in* Y, *allora* A *è compatto.*
3. *Dimostrare, utilizzando un opportuno controesempio, che se* X *non è riflessivo la precedente affermazione non è sempre vera.*

Esercizio 2.
Sia $f \in L^1([0,1])$, *e* $F : W_0^{1,p}((0,1)) \to \mathbb{R}$, *con* $1 < p < \infty$, *definita da*

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{|u'|^p}{p} - fu \right).$$

1. *Dimostrare, utilizzando la disuguaglianza di Poincaré, che* F *è limitato dal basso e che i suoi sottolivelli*
$$\left\{ u \in W_0^{1,p}((0,1)) : F(u) \leq c \right\}$$
sono limitati per ogni $c \in \mathbb{R}$.
2. *Dimostrare che, se* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *verifica* $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \inf_{W_0^{1,p}((0,1))} F$, *allora a meno di estratte* u_n *converge debolmente* in* $W^{1,p}((0,1))$ *e in norma in* $L^\infty((0,1))$.
3. *Dimostrare che il limite* u_0 *dato dal punto precedente è di minimo assoluto per* F, *cioè* $F(u_0) = \min_{W_0^{1,p}((0,1))} F$.
4. *Dimostrare che* u_0 *soddisfa la condizione*
$$\int_0^1 |u_0'|^{p-2} u_0' \varphi' = \int_0^1 f\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_0^1((0,1)).$$

Esercizio 3.
Sia X *uno spazio di Banach complesso e* $A \in \mathcal{L}(X)$ *tale che* $0 \in \sigma(A)$.

1. *Dimostrare, utilizzando un risultato visto a lezione, che se* $0 \in \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ *allora* A <u>*non*</u> *è una mappa aperta.*
2. *Dimostrare, utilizzando opportuni esempi, che se* $0 \in \sigma_p(A)$ *allora* A *potrebbe essere una mappa aperta oppure potrebbe non esserlo.*

Esercizio 4.

Sia $X = C([0,1])$ *e* $A \in \mathcal{L}(X)$ *definita da* $Af(x) := \displaystyle\int_0^x fg$, *per* $g \in X$.

1. *Dimostrare che* $A \in \mathcal{K}(X)$.
2. *Dimostrare che* $\sigma(A) = \{0\}$ *e dire, al variare di* g, *se* 0 *appartiene allo spettro puntuale, continuo o residuo.*
3. *Dimostrare che l'operatore aggiunto* $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ *è dato da*

$$A^* : \mu \mapsto g(x)\mu(1-x)\mathrm{d}x,$$

ovvero la misura avente come densità $g(x)\mu(1-x)$ *rispetto alla misura di Lebesgue.*

Esercizio 5.

Sia H *uno spazio di Hilbert complesso e* $A \in \mathcal{L}(H)$.

1. *Dimostrare che* A *è un'isometria se e solo se* $A^*A = \mathbb{I}_H$.
2. *Dimostrare che* A *è un'isometria <u>suriettiva</u> se e solo se* $A^*A = AA^* = \mathbb{I}_H$.
3. *Dimostrare, utilizzando un controesempio visto a lezione, che, anche se* $AA^* = \mathbb{I}_H$, A *potrebbe non essere un'isometria.*