AM450 - Analisi Funzionale

Luca Battaglia

Esercizi su applicazioni del Teorema di Baire e topologie deboli

Esercizio 1.
Sia $X = c_{00}$ lo spazio delle successioni infinitesime

$$X := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists\, K \in \mathbb{N} : x(k) = 0 \quad \forall\, k > K\},$$

munito della norma $\|x\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$, e sia $A_n \in \mathcal{L}(X)$ definito da

$$A_n x = (x(1), 2x(2) \dots, nx(n), 0, \dots).$$

1. *Dimostrare che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < +\infty$ per ogni $x \in X$.*
2. *Calcolare $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X)}$ e dedurne che $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X)} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.*
3. *Sia A il limite puntuale di A_n, definito da $Ax := \lim_{n\to+\infty} A_n x$. Dando per buono che tale limite esiste per ogni x e che è lineare, dire se è continuo.*

Esercizio 2. *Sia $E \lhd L^2([0,1])$ che sia completo anche rispetto alla norma $\|f\|_\infty := \|f\|_{L^\infty([0,1])}$.*

1. *Dimostrare che esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty \le C\|f\|_2$ per ogni $f \in E$.*
2. *Sia ora $\{f_n\}$ on sistema ortonormale completo per E e, per q.o. $y \in [0,1]$, sia $g_y(x) := \sum_n f_n(y) f_n(x)$. Dimostrare che $\|g_y\|_2 = \sqrt{\sum_n f_n(y)^2}$.*
3. *Utilizzando il primo punto con $f = g_y$ e il secondo punto, dimostrare che $\sum_n f_n(y)^2 \le C^2$ per q.o. $y \in [0,1]$.*
4. *Dedurre dal punto precedente che E ha dimensione finita.*

Esercizio 3.
Sia X uno spazio di Banach e $C \subset X$ un sottoinsieme compatto.

1. *Dimostrare che C è di seconda categoria in sé.*
2. *Dimostrare che, se X ha dimensione infinita, C ha interno vuoto.*
3. *Dedurre che, se X ha dimensione infinita, C è di prima categoria in X.*

Esercizio 4.
Siano B_1 e B_2 le palle unità aperte rispettivamente in ℓ_1, ℓ_2, ovvero

$$B_1 := \{x \in \ell_1 : \|x\|_{\ell_1} < 1\}, \qquad\qquad B_2 := \{x \in \ell_2 : \|x\|_{\ell_2} < 1\}.$$

1. *Dimostrare, utilizzando una proprietà delle topologie deboli, che B_1 e B_2 hanno interno vuoto nelle rispettive topologie deboli.*
2. *Dire se B_1 è aperto sequenziale nella topologia debole $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$.*
   (Si ricorda che un sottoinsieme A di uno spazio topologico si dice aperto sequenziale se per ogni successione x_n convergente a un punto di A abbiamo $x_n \in A$ definitivamente.)
3. *Dire se B_2 è aperto sequenziale nella topologia debole $\sigma(\ell_2, \ell_2)$.*

Esercizio 5.
Sia $0 \leq \varphi \in C_0^1((0, +\infty))$ tale che $\max \varphi = 1$ e sia $f(x) := 1 - \varphi(nx)$.

1. *Dimostrare che $\{f_n\}$ converge debolmente in $C([0,1])$ e trovare il suo limite debole f.*
   (Si ricorda che il duale di $C([0,1])$ può essere identificato con le misure con segno su $[0,1]$, per i dettagli vedere il Teorema 4.11 del Testo di H. Brézis)
2. *Calcolare $\|f_n\|_{C([0,1])}, \|f\|_{C([0,1])}, \|f_n - f\|_{C([0,1])}$.*
3. *Dedurre, utilizzando i punti precedenti e un risultato visto a lezione, che $C([0,1])$ <u>non</u> è uno spazio uniformemente convesso.*