AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2023-24)

Luca Battaglia

Esercizi su differenziazione di misure e spazi L^p

Esercizio 1.
Siano $F, G \in AC([a,b])$.

1. *Dimostrare che $FG \in AC([a,b])$.*
2. *Dimostrare che $F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (F'G + FG')\mathrm{d}m$.*
3. *Ricordando che l'assoluta continuità implica l'uniforme continuità e che la lipschitzianità implica l'assoluta continuità, trovare un esempio di $F, G \in AC$ tali che $FG \notin AC$.*

Esercizio 2.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misura, f misurabile e, per $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n := \{x \in X : n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

1. *Dimostrare che $f \in L^\infty$ se e solo se $\mu(E_n) > 0$ solo per finiti n.*
2. *Dimostrare, utilizzando il punto precedente e un'opportuna funzione semplice, che $f \in L^\infty$ se e solo se $fg \in L^1$ per ogni $g \in L^1$.*
3. *Dimostrare che, per ogni $p \in [1, \infty)$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p \mu(A_n) \leq \int |f|^p \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^p \mu(A_n)$$

e dedurne che, se μ è finita, $f \in L^p$ se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(A_n) < +\infty$.

Esercizio 3.
Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $a_n(k) = \dfrac{\left(\cos \frac{1}{n}\right)^k}{n}$.

1. *Calcolare $\|a_n\|_p$ per $p \in [1, \infty]$ e dedurne che $\{a_n\}$ è limitata in ℓ_p se e solo se $p \geq 2$.*
2. *Calcolare il limite puntuale $\lim_{n\to\infty} a_n(k)$ per k fissato.*
3. *Dimostrare che $\{a_n\}$ converge in ℓ_p se e solo se $p > 2$ e calcolarne il limite.*

Esercizio 4.
Siano $f := \chi_{[-1,1]}$, $\varphi(x) := \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ e $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$.

1. *Calcolare esplicitamente $(f * \varphi_n)(x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Utilizzando un teorema di passaggio al limite, dimostrare esplicitamente che $f * \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty)$.*
3. *Stabilire se $f * \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.*