AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2023-24)

Luca Battaglia

Esercizi su differenziazione di misure e spazi L^p

Esercizio 1.
Siano $F, G \in AC([a,b])$.

1. *Dimostrare che* $FG \in AC([a,b])$.
2. *Dimostrare che* $F(b)G(b) - F(a)G(a) = \displaystyle\int_a^b (F'G + FG')\mathrm{d}m$.
3. *Ricordando che l'assoluta continuità implica l'uniforme continuità e che la lipschitzianità implica l'assoluta continuità, trovare un esempio di* $F, G \in AC$ *tali che* $FG \notin AC$.

Esercizio 2.
Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio misura,* f *misurabile e, per* $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n := \{x \in X : n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

1. *Dimostrare che* $f \in L^\infty$ *se e solo se* $\mu(E_n) > 0$ *solo per finiti* n.
2. *Dimostrare, utilizzando il punto precedente e un'opportuna funzione semplice, che* $f \in L^\infty$ *se e solo se* $fg \in L^1$ *per ogni* $g \in L^1$.
3. *Dimostrare che, per ogni* $p \in [1, \infty)$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p \mu(A_n) \leq \int |f|^p \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^p \mu(A_n)$$
e dedurne che, se μ *è finita,* $f \in L^p$ *se e solo se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(A_n) < +\infty$.

Esercizio 3.
Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *definita da* $a_n(k) = \dfrac{\left(\cos \frac{1}{n}\right)^k}{\sqrt{n}}$.

1. *Calcolare* $\|a_n\|_p$ *per* $p \in [1, \infty]$ *e dedurne che* $\{a_n\}$ *è limitata in* ℓ_p *se e solo se* $p \geq 2$.
2. *Calcolare il limite puntuale* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n(k)$ *per* k *fissato.*
3. *Dimostrare che* $\{a_n\}$ *converge in* ℓ_p *se e solo se* $p > 2$ *e calcolarne il limite.*

Esercizio 4.
Siano $f := \chi_{[-1,1]}$, $\varphi(x) := \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ *e* $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$.

1. *Calcolare esplicitamente* $(f * \varphi_n)(x)$ *al variare di* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Utilizzando un teorema di passaggio al limite, dimostrare esplicitamente che* $f * \varphi_n \underset{n \to +\infty}{\to} f$ *in* $L^p(\mathbb{R})$ *per ogni* $p \in [1, \infty)$.
3. *Stabilire se* $f * \varphi_n \underset{n \to +\infty}{\to} f$ *in* $L^\infty(\mathbb{R})$.