

AM400 - Istituzioni di analisi superiore (A.A. 2024-25)

Luca Battaglia

Esercizi su misure prodotto e misure di Radon

Esercizio 1.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ fissati e $f_n = n^a \chi_{[n^b, 2n^b]}$.

1. Dire per quali a, b si ha $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ m-q.o..
2. Dire per quali a, b si ha $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ in media.
3. Dire per quali a, b si ha $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ in misura.

Esercizio 2.

Sia, per $x, y > 0$, $f(x, y) := \begin{cases} (1 + y - x)e^{y-x} & \text{se } y \leq x \\ 0 & \text{se } y > x \end{cases}$.

1. Calcolare, per x fissato, $\int_0^{+\infty} f(x, y) dy$ e, per y fissato, $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx$.
2. Calcolare $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy$ e $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx$ e mostrare che sono due valori finiti ma differenti.
3. Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f(x, y)| dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx = +\infty$$

e confrontare con quanto visto a lezione.

Esercizio 3.

Siano μ, ν misure finite sui boreliani di $\mathbb{R}$ e sia $L : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale lineare continuo positivo dato da

$$L : f \mapsto \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}} f(x) d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

1. Trovare, utilizzando il Teorema di Fubini, una misura finita λ tale che $Lf = \int f d\lambda$.
2. Calcolare, utilizzando il Teorema di Riesz, il valore $\sup_{0 \leq f \leq 1} Lf$ e trovare una successione $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ che massimizzi questo estremo superiore.
3. Dimostrare che, se i punti hanno misura nulla per μ, ν e $\mu(-E) = \mu(E)$ e $\nu(-E) = \nu(E)$ per ogni boreliano E , allora $\lambda(\mathbb{R}) = \frac{\mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R})}{2}$.

Esercizio 4.

Sia, per $n \in \mathbb{N}$, $L_n \in C([-1, 1])^*$ definito da:

$$L_n f = \frac{n^2}{n+2} \int_0^{\frac{1}{n}} (1-x)f(x)dx - \frac{n}{n+2} \int_{-1}^0 f(x)dx.$$

1. Utilizzando il Teorema di Riesz, calcolare esplicitamente la norma $\|L_n\|_{C([-1,1])^*} = \sup_{-1 \leq f \leq 1} |L_n f|$.
2. Dimostrare che non esiste nessuna $f \in C([-1, 1])$ tale che $-1 \leq f \leq 1$ e $L_n f = \|L_n\|_{C([-1,1])^*}$.
3. Trovare una misura con segno di Radon μ tale che $L_n f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f d\mu$.