Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 1 (24 Febbraio 2010)

Ripasso

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f è una funzione di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ perché rapporto di funzioni di classe C^1 in cui il denominatore non è nullo quindi per provare la differenziabilità di f su $\mathbb{R}^2$ è sufficiente provare che f è differenziabile in $(0,0)$. Per prima cosa osserviamo che f ammette derivate parziali nell' origine in quanto

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

   Adesso proviamo la differenziabilità di f in $(0,0)$

   $$\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)- < \nabla f(0,0),(h,k) >}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{h^2k^2}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{h^2k^2}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

   $$\leq \frac{k^2}{h^4+k^2}\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{h^4+k^2}{h^4+k^2}\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   quindi f è differenziabile.

   Per provare che f non è di classe C^1 dobbiamo far vedere che almeno una delle derivate parziali di f non è continua.

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^4+y^2} - \frac{4x^5y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Notiamo che $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ non è continua nell'origine perché

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^4+x^4} - \frac{2x^8}{(2x^4)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

   Quindi f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe C^1

2. Siccome $f(x,g(x)) = 0 \ \forall\, x \in R$ derivando rispetto ad x otteniamo che

   $$0 = \frac{d}{dx}f(x,g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   In particolare per $x = 0$ siccome $g(0) = 0$ abbiamo che $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + g'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2g'(0) \Longrightarrow g'(0) = 0$

   Derivando di nuovo rispetto ad x la relazione precedente otteniamo che

   $$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + g''(x)\frac{\partial f}{\partial y} + g'(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + g'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

quindi per $x = 0$ si ottiene $0 = 1 + 2g^{''}(0) \Longrightarrow g''(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Siccome $g'(0) = 0$ e $g''(0) < 0$ allora 0 è un punto di massimo relativo per g.

3. (a) $|\sin x| \leq |x|$
   $|\sin x| = \left|\int_0^x \frac{d}{dt} \sin t \, dt\right| = \left|\int_0^x \cos t \, dt\right| \leq \left|\int_0^x |\cos t| dt\right| \leq \left|\int_0^x 1 \, dt\right| = |x|$
   Si poteva anche dimostrare la disuguaglianza utilizzando il teorema di Lagrange: $\forall x \in \mathbb{R}$ applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\sin x$ nell'intervallo $(0, x)$ (o $(x, 0)$) otteniamo che $\exists \ \xi = \xi(x) \in (0, x)$ tale che $\sin x = \sin x - \sin 0 = \cos\xi \cdot (x - 0) = \cos\xi \cdot x$. Passando ai moduli si ottiene che $|\sin x| = |\cos\xi||x| \leq |x|$.
   Anche le prossime disuguaglianze possono essere dimostrate tramite il teorema di Lagrange.

   (b) $|1 - \cos x| \leq \dfrac{x^2}{2}$
   $|1 - \cos x| = |\cos x - \cos 0| = \left|\int_0^x \frac{d}{dt} \cos t \, dt\right| = \left|\int_0^x \sin t \, dt\right| \leq \left|\int_0^x |\sin t| \, dt\right| \leq$
   $\leq \left|\int_0^x |t| \, dt\right| = \dfrac{1}{2} x^2$

   (c) $|x - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{6}$
   $|x - \sin x| \leq \left|\int_0^x 1 \, dt - \int_0^x \cos t \, dt\right| = \left|\int_0^x 1 - \cos t \, dt\right| \leq \left|\int_0^x |1 - \cos t| dt\right| \leq$
   $\leq \left|\int_0^x \frac{1}{2} t^2 dt\right| = \dfrac{1}{6}|x|^3$

   (d) $|\tan x| \leq 2|x|$ se $|x| \leq 1$
   $|\tan x| = \dfrac{|\sin x|}{\cos x} \leq \dfrac{|x|}{|\cos x|} \leq \dfrac{|x|}{\cos 1} \leq \dfrac{|x|}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2|x|$

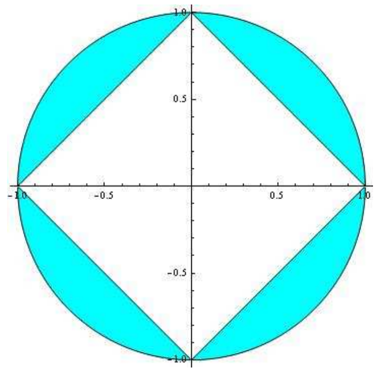
   (e) $|\arctan x| \leq |x|$
   $|\arctan x| \leq \left|\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}\right| \leq \left|\int_0^x 1 \, dt\right| = |x|$

   (f) $|e^x - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$
   $|e^x - 1| \leq \left|\int_0^x e^t dt\right| \leq \left|\int_0^x e^{|x|} dt\right| = e^{|x|}|x| \leq e|x| \leq 3|x|$

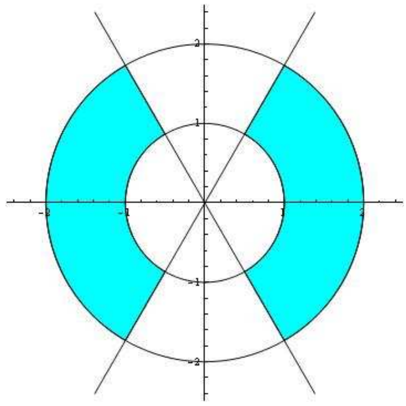
   (g) $|\sinh x| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$
   $|\sinh x| = \dfrac{|e^x - e^{-x}|}{2} = \dfrac{|e^x - 1 + 1 - e^{-x}|}{2} \leq \dfrac{|e^x - 1|}{2} + \dfrac{|1 - e^{-x}|}{2} \leq$
   $\leq \dfrac{3}{3}|x| + \dfrac{3}{2}|x| = 3|x|$.

   (h) $|\log(1 + x)| \leq 2|x|$ se $|x| \leq \dfrac{1}{2}$
   $|\log(1 + x)| = \left|\int_0^x \frac{dt}{1 + t}\right| \leq \left|\int_0^x \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} dt\right| = 2|x|$

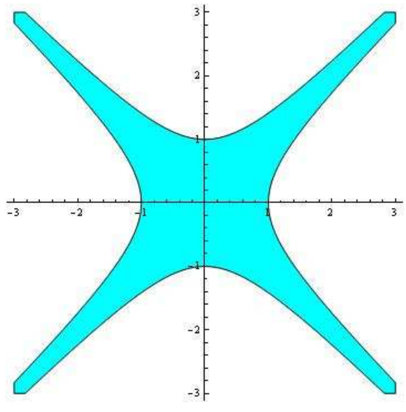
4. (a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |x| + |y| \geq 1\right\}$
   A è la regione ottenuta intersecando il cerchio unitario con le regioni $y \geq 1 - |x|$ e $y \leq |x| - 1$.



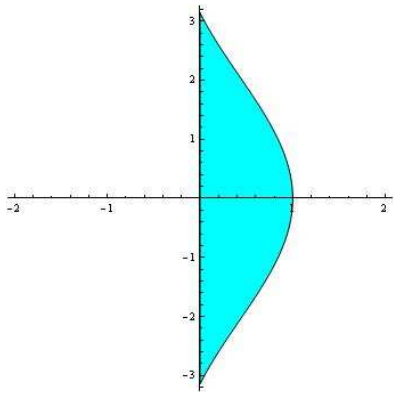
(b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq \sqrt{3}|x|\right\}$
B è la regione ottenuta intersecando la corona di raggi 1 e 2 con l' insieme $-\sqrt{3}|x| \leq y \leq \sqrt{3}|x|$



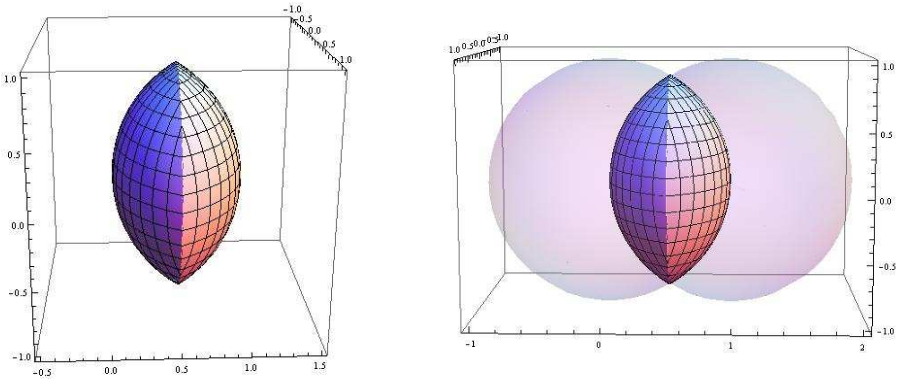
(c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - y^2| \leq 1\right\}$
C è la porzione di piano delimitate delle iperboli $x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - x^2 = 1$



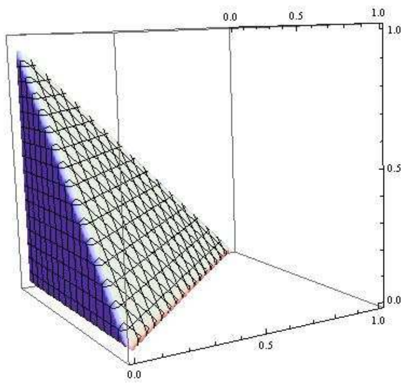
(d) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \dfrac{\sin y}{y}, y^2 \le \pi^2 \right\}$
D è la regione di piano compresa tra l'asse y e il grafico della funzione $x = \frac{\sin y}{y}$ nell'intervall0 $[-\pi, \pi]$



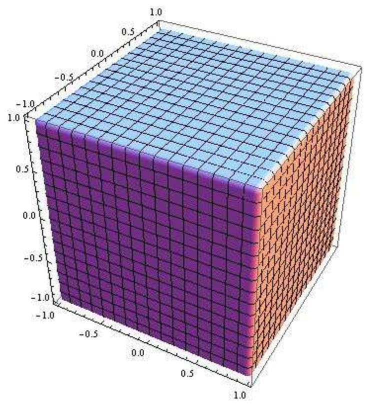
5. (a) $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x^2 + y^2 + z^2 \le 2y \right\}$
E è l'insieme ottenuto intersecando la palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 1 con la palla di centro $(0,1,0)$ e raggio 1



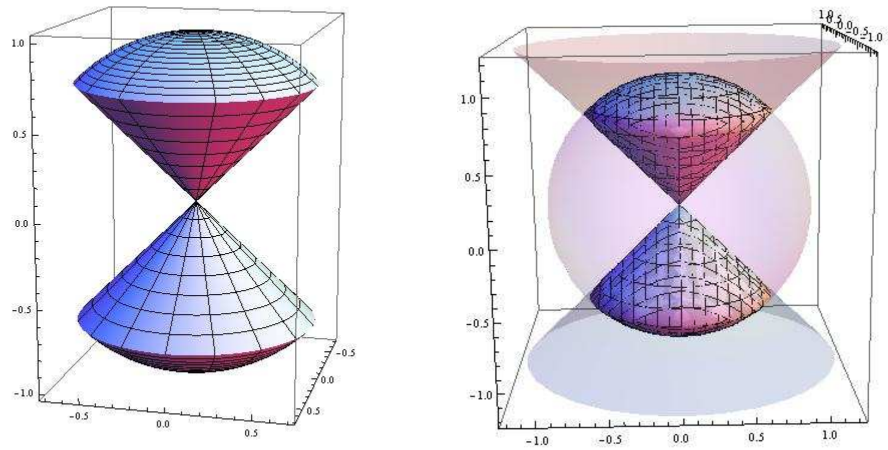
(b) $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \right\}$
F è il tetraedro ottenuto tagliando il settore $x, y, z > 0$ con il piano $x + y + z = 1$ (che è il piano ortogonale al vettore $(1,1,1)$ passante per $(0,0,1)$)



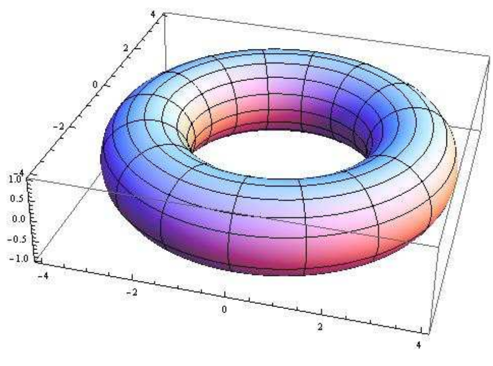
(c) $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,|y|,|z|\} \leq 1\right\}$
G è il cubo centrato nell'origine con spigoli di lunghezza 2



(d) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2\right\}$
H è l'intersezione tra la palla unitaria e l'interno del cono $x^2+y^2 = z^2$ avente vertice in $(0,0,0)$, asse parallelo all'asse z e angolo di apertura $\frac{\pi}{4}$.



(e) $I = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 = 1\right\}$
I è il toro (la ciambella) ottenuta ruotando attorno all'asse z il cerchio del piano yz di equazione $(y-3)^2 + z^2 = 1$.



6. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^{2x}}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx = e^{-2x}\sin x\,\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin x\,dx =$

$\displaystyle = 2\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin x\,dx = 2\left(-e^{-2x}\cos x\,\Big|_0^{\infty} - 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx\right) =$

$\displaystyle = 2 - 4\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx = 2 - 4\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{2x}}dx$ quindi

$\displaystyle 5\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{2x}}dx = 2 \Longrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{2x}}dx = \frac{2}{5}$

(b) $\displaystyle\int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx = \int_0^{4\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}dx = \sqrt{2}\int_0^{4\pi}|\sin\frac{x}{2}|dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx +$

$\displaystyle -\sqrt{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\sin\frac{x}{2}dx = -2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,\Big|_0^{2\pi} + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_{2\pi}^{4\pi} = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2} =$

$= 8\sqrt{2}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx$

Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$ allora $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ quindi

$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\pi}\frac{2}{2+2t^2+1-t^2}dt = 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{3+t^2} =$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} \overset{z=\frac{t}{\sqrt{3}}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan z\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(d) $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x^2-x-3}{x^4-9}\,dx$

Cerchiamo A, B, C, D tali che $\displaystyle\frac{x^2-x-3}{x^4-9} = \frac{A}{x-\sqrt{3}} + \frac{B}{x+\sqrt{3}} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$.

$A(x+\sqrt{3})(x^2+3) + B(x-\sqrt{3})(x^2+3) + (Cx+D)(x^2-3) = x^2-x-3 \Rightarrow A(x^3+\sqrt{3}x^2+3x+3\sqrt{3}) + B(x^3-\sqrt{3}x^2+3x-3\sqrt{3}) + Cx^3+Dx^2-3Cx-3D = x^2-x-3 \Rightarrow x^3(A+B+C) + x^2(A\sqrt{3}-B\sqrt{3}+D) + x(3A+3B-3C) + 3\sqrt{3}A - 3\sqrt{3}B - 3D = x^2-x-3$ da cui

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}+D=1 \\ 3A+3B-3C=-1 \\ 3\sqrt{3}A-3\sqrt{3}B-3D=-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A+B-C=-\frac{1}{3} \\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}+D=1 \\ \sqrt{3}A-\sqrt{3}B-D=-1 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava che $C=\frac{1}{6}$ mentre dalle ultime due che $D=1$. Sostituendo questi valori nel sistema otteniamo $\begin{cases} A+B=-\frac{1}{6} \\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}=0 \end{cases}$ da cui $A = B = -\frac{1}{12}$.

Dunque $\displaystyle\frac{x^2-x-3}{x^4-9} = -\frac{1}{12}\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\frac{1}{x+\sqrt{3}} + \frac{\frac{1}{6}x+1}{x^2+3}$ e quindi

$\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x^2-x-3}{x^4-9}\,dx = -\frac{1}{12}\int_3^{\infty}\frac{dx}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\int_3^{\infty}\frac{dx}{x+\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\int_3^{\infty}\frac{x}{x^2+3} + \int_3^{\infty}\frac{dx}{x^2+3}$

$\displaystyle = -\frac{1}{12}\log(x-\sqrt{3}) - \frac{1}{12}\log(x+\sqrt{3}) + \frac{1}{12}\log(x^2+3)\Big|_3^{\infty} + \int_3^{\infty}\frac{dx}{x^2+3} =$

$\displaystyle = \frac{1}{12}\log\left(\frac{x^2+3}{x^2-3}\right)\Big|_3^{\infty} + \int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+3} = +\frac{1}{12}\log 1 - \frac{1}{12}\log 2 + \frac{1}{3}\int_3^{\infty}\frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{12}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy = -\frac{1}{12}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan y\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{12}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi - \frac{1}{12}\log 2$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 2 (3 Marzo 2010)
Spazi normati, contrazioni

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

   $\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}dx = \frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)\Big|_0^1 =$
   $= \dfrac{\log(1+n^2)}{2n}.$

   $\|f_n\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|\, dx$

   Siccome f_n è una funzione continua in $[0,1]$ questo sup è il massimo di f_n nell'intervallo $[0,1]$. Siccome

   $$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow n^2x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{n}$$

   abbiamo $\|f_n\|_\infty = \max\left\{f_n(0), f_n\left(\dfrac{1}{n}\right), f_n(1)\right\} = \max\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{n}{1+n^2}\right\} = \dfrac{1}{2}.$

   In particolare siccome $\|f_n\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mentre $\|f_n\|_1 \nrightarrow 0$ le due norme non possono essere equivalenti.

2. $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}\sin^2 x$. Sia $f(x) = \sin^2 x$. Proviamo che $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $(C([0,\pi]), \|\cdot\|_1)$.

   $\|f_n - f\|_1 = \displaystyle\int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|dx = \int_0^\pi |e^{\frac{x}{n}}\sin^2 x - \sin^2 x|\, dx = \int_0^\pi |e^{\frac{x}{n}} - 1|\sin^2 x\, dx \leq$

   $\leq \displaystyle\int_0^\pi (e^{\frac{\pi}{n}} - 1)\sin^2 x\, dx = (e^{\frac{\pi}{n}} - 1)\int_0^\pi \sin^2 x\, dx \leq (e^{\frac{\pi}{n}} - 1)\int_0^\pi 1\, dx = \pi(e^{\frac{\pi}{n}} - 1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

   Quindi $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $(C([0,\pi]), \|\cdot\|_1)$.

3. $x_n(k) = \dfrac{n}{ne^k + 1}$

   Per prima cosa osserviamo che $x_n(k) \approx \dfrac{1}{e^k}$ $\forall\ n$ quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty |x_n(k)|^p < \infty$

   $\forall\ p$ cioè $x_n \in \ell_p$ $\forall\ p \geq 1$. Sia $x \in \ell_p$ definita da $x(k) = \dfrac{1}{e^k}$ notiamo che

   $$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^\infty |x_n(k) - x(k)| = \sum_{k=0}^\infty \left|\frac{n}{ne^k+1} - \frac{1}{e^k}\right| = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{e^k(ne^k+1)} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{e^{2k}} =$$

   $= \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{e^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in ℓ_1. Più in generale $\forall\ p \geq 1$ abbiamo che

   $\|x_n - x\|_p \leq \|x_n - x\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in ℓ_p

4. $x_n(k) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!(2n)^{k+1}}$

   $$\|x_n\|_1 = \sum_{k=0}^\infty \left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!(2n)^{k+1}}\right| = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+2)!(2n)^{k+1}} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(2j)!(2n)^j} = \cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1$$

In particolare $\|x_n\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ qunidi x_n converge a 0 in ℓ_1

5. $x_n(k) = \dfrac{e^{-\frac{k}{n}}}{n}$.
$$\|x_n\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-\frac{1}{n}})^k = \frac{1}{n}\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}$$
$$\|x_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2k}{n}}}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-\frac{2}{n}})^k = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1-e^{-\frac{2}{n}}} = \frac{1}{n}\ \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}$$
Dato che $\|x_n\|_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ allora x_n converge a 0 in ℓ_2.
Invece x_n non converge in ℓ_1 infatti se per assurdo $\exists\ x \in \ell_1$ tale che $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in ℓ_1 allora $\|x_n - x\|_2 \leq \|x_n - x\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ anche in ℓ_2. Ma allora per unicità del limite in ℓ_2 si dovrebbe avere $x = 0$ che è assudo perchè allora $\|x_n\|_1 = \|x_n - x\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mentre il conto precedente ci dice che $\|x_n\|_1 = \dfrac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

6. $x_n(k) = \dfrac{k^2+nk+2k+n}{(k^2+1)(n+k)}$.

   (a) $x_n(k) = \dfrac{k^2+nk+2k+n}{(k^2+1)(n+k)} \approx \dfrac{1}{k}$ $\forall\ n$ quindi $x_n \in \ell_2$ e $x_n \notin \ell_1$

   (b) Sia $x(k) = \dfrac{k+1}{k^2+1}$ allora
$$\|x_n - x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k^2+nk+2k+n}{(k^2+1)(n+k)} - \frac{k+1}{k^2+1}\right|^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{(k^2+1)(n+k)}\right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2+1}\right)^2 \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2+1}\right)^2 \frac{1}{n^2} =$$
$$\leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2+1}\right)^2 \overset{n\to\infty}{=\!\!\longrightarrow} 0 \quad \text{perché} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2+1}\right)^2 \approx \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+1} < \infty$$
Quindi x_n converge ad x in ℓ_2.

   (c) Utilizzando il fatto che $n + k \geq 2\sqrt{nk}$ abbiamo che
$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - x(k)| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k^2+nk+2k+n}{(k^2+1)(n+k)} - \frac{k+1}{k^2+1}\right| =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k^2+1)(n+k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k^2+1)(n+k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}\frac{1}{2\sqrt{nk}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$$
In particolare dato che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+1} < \infty$ si ha che $\|x_n - x\|_1 < \infty$ (cioè $x_n - x \in \ell_1$) e che $\|x_n - x\|_1 \leq \displaystyle\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n - x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in ℓ_1.

7. $x_n(k) = \dfrac{n\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{1+k^2}}$.
Osserviamo per prima cosa che se $x \geq 0$ allora

$$|\log(1+x)-x| = \left|\int_0^x \frac{1}{1+t} - 1\, dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{1}{1+t} - 1\right| dt = \int_0^x \frac{t}{1+t}\, dt \leq \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2$$

Usando questo fatto ricaviamo che se $x(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{1+k^2}}$ allora

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{n\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{1+k^2}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|n\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right) - \frac{1}{\sqrt{k}}\right|}{\sqrt{1+k^2}} =$$

$$= n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right) - \frac{1}{n\sqrt{k}}\right|}{\sqrt{1+k^2}} \leq n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2kn^2}}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{1+k^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

perché $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{1+k^2}} \approx \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty$

8. $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$

   (a) Siccome x_n è definitivamente nulla allora $\|x_n\|_1 < \infty$ perché è una somma finita. Quinidi $x_n \in \ell_1$.

   (b) $\forall \varepsilon > 0$ se $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ allora $\forall\, n, m \geq n_\varepsilon$ si ha che $\|x_n - x_m\|_\infty = \max\left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{m}\right\} \leq \dfrac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$. Dunque x_n è una successione di Cauchy rispetto a $\|\ \|_\infty$.

   (c) Supponiamo per assurdo che $\exists\, x \in \ell_1$ tale che $\|x_n - x\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Allora $\forall\, k$ se $n \geq k$ si ha che $\left|\dfrac{1}{k} - x(k)\right| = |x_n(k) - x(k)| \leq \|x_n - x\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi necessariamente $x(k) = \dfrac{1}{k}$. Ma allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)| = \sum_{k=1}\frac{1}{k} = \infty$ il che è assurdo perchè $x \in \ell_1$. In particolare $(\ \ell_1, \|\ \|_\infty)$ non è completo perché x_n è una successione di Cauchy in questo spazio ma non è convergente.

9. Sia $\Phi : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ definita da $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^3 f(t)} dt$.
Per prima cosa osserviamo che $\Phi(f) \in C([0,1])$ perché è la funzione integrale di una funzione continua, quindi Φ è ben definita. Inoltre se $f, g \in C([0,1])$ si ha che

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left|\int_0^x e^{t^3 f(t)} dt - \int_0^x e^{t^3 g(t)} dt\right| \leq \int_0^x |e^{t^3 f(t)} - e^{t^3 g(t)}|\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^x 3|t^3 f(t) - t^3 g(t)| dt = 3\int_0^x t^3 |f(t) - g(t)| dt \leq 3\, \|f - g\|_\infty \int_0^x t^3\, dt\ =$$

$= 3\,\|f-g\|_\infty\, \dfrac{1}{4}x^4 \le \dfrac{3}{4}\|f-g\|_\infty.$

Pertanto $\|\Phi(f)-\Phi(g)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\Phi(f)(x)-\Phi(g)(x)| \le \dfrac{3}{4}\|f-g\|_\infty.$

Quindi Φ è una contrazione su $C([0,1])$.

(Abbiamo usato il fatto che se $x, y \le 1$ allora $|e^x - e^y| \le 3|x-y|$)

10. $X = \{f \in C([0,1]) : 0 \le f(x) \le 1\ \forall x\}$

    $\Phi : X \to C([0,1]) \qquad \Phi(u)(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^x u^2(t)dt.$

    (a) Siano $f_n \in X$ e $f \in C([0,1])$ tali che $\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, proviamo che $f \in X$. $\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow f_n(x) \longrightarrow f(x)\ \forall\, x \in [0,1]$ quindi passando al limite nella disuguaglianza $0 \le f_n(x) \le 1$ otteniamo che $0 \le f(x) \le 1\ \forall\, x \in [0,1]$ cioè che $f \in X$.
    Quindi X è chiuso perchè contiene i limiti di tutte le sue successioni.

    (b) Sia $u \in X$ allora $0 \le u(x) \le 1\ \forall\, x$ quindi

    $$0 \le \Phi(u)(x) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^x u^2(t)dt \le \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^x 1\ dt = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}x \le \frac{2}{3} \le 1 \Longrightarrow \Phi(u) \in X$$

    Pertanto $\Phi(X) \subseteq X$. Inoltre se $u, v \in X$ allora abbiamo che

    $$|\Phi(u)(x)-\Phi(v)(x)| = \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^x u^2(t)dt - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_0^x v^2(t)dt\right| = \frac{1}{3}\left|\int_0^x u^2(t) - v^2(t)\ dt\right|$$

    $$\le \frac{1}{3}\int_0^x |u^2(t)-v^2(t)|dt = \frac{1}{3}\int_0^x |u(t)-v(t)||u(t)+v(t)|dt \le \frac{2}{3}\int_0^x |u(t)-v(t)|dt =$$

    $$\le \frac{2}{3}\int_0^x \|u-v\|_\infty dt = \frac{2}{3}x\|u-v\|_\infty \le \frac{2}{3}\|u-v\|_\infty$$

    (c) Il teorema delle contrazioni ci dice che Φ ha un unico punto fisso $u \in C([0,1])$. Per la definizione di punto fisso si ha $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^x u^2(t)dt = u(x)$ $\forall\, x \in [0,1]$. Questa relzione ci dice che u è in realtà di classe C^1 e derivando rispetto ad x si ottiene che u è soluzione dell'equazione differenziale $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{3}u^2(x) \\ u(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$.
    Per trovare u dobbiamo dunque risolvere l'equazione:

    $$\int_0^x \frac{u'(t)}{u^2(t)}dt = \int_0^x \frac{1}{3}dt \Longrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{u(x)} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{3}x \Longrightarrow -\frac{1}{y}\bigg|_{\frac{1}{3}}^{u(x)} = \frac{1}{3}x \Longrightarrow -\frac{1}{u(x)} + 3 = \frac{1}{3}x$$

    $$\Longrightarrow u(x) = -\frac{1}{\frac{1}{3}x - 3} = \frac{3}{9-x}$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 3 (10 Marzo 2010)
Teorema della funzione implicita, spazi metrici

1. (a) $F(x,y) = \arctan(x) + e^{-y} - \cos(xy)$ è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -e^{-y} + x\sin(xy)\big|_{(x,y)=(0,0)} = -1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $\rho \leq 1$, abbiamo che $|F(x,0)| = |\arctan(x)| \leq |x| \leq r$, dunque posto $T = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = -1$, per avere $\sup_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \frac{\rho}{2}$; inoltre $\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = \left|1 - e^{-y} + x\sin(xy)\right| \leq$ $\leq \left|1 - e^{-y}\right| + |x||\sin(xy)| \leq 3|-y| + |x| \leq 3\rho + r \leq \frac{7}{2}\rho$, dunque per avere $\sup_{(x,y) \in B_r(0) \times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho =$ $= \frac{1}{7}$, e di conseguenza $r = \frac{1}{14}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $\arctan(x) + e^{-g(x)} - \cos(xg(x)) \equiv$ $\equiv 0\, \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \frac{d}{dx}\left(\arctan(x) + e^{-g(x)} - \cos(xg(x))\right)\Big|_{x=0} =$ $\frac{1}{1+x^2} - g'(x)e^{-g(x)} + (xg'(x) + g(x))\sin(xg(x))\Big|_{x=0} = 1 - g'(0) \Rightarrow$ $\Rightarrow g'(0) = 1$, perché $g(0) = 0$, e analogamente $0 = \frac{d^2}{dx^2}$ $(\arctan(x) +$ $+e^{-g(x)} - \cos(xg(x))\Big)\Big|_{x=0} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + g'^2(x)e^{-g(x)} - g''(x)e^{-g(x)} +$ $+(2g'(x) + xg''(x))\sin(xg(x)) + (xg'(x) + g(x))^2\cos(xg(x))\big|_{x=0} = 1 -$ $-g''(0) \Rightarrow g''(0) = 1 \Rightarrow g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) = x +$ $+\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.

   (b) $F(x,y) = e^{2y} - \sin(x+y) - 1$ è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 2e^{2y} - \cos(x+y)\big|_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $\rho \leq \frac{1}{2}$, abbiamo che $|F(x,0)| = |\sin(x)| \leq |x| \leq r$, dunque posto $T = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = 1$, per avere $\sup_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \frac{\rho}{2}$; inoltre $\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = \big|1 - 2e^{2y} + \cos(x+$

$+y)| \leq \left|2-2e^{2y}\right| + |\cos(x+y)-1| \leq 12|y| + \dfrac{(x+y)^2}{2} \leq 12\rho + \dfrac{r^2}{2} +$
$+\dfrac{\rho^2}{2} + r\rho \leq 12\rho + \dfrac{\rho^2}{8} + \dfrac{\rho^2}{2} + \dfrac{\rho^2}{2} \leq 12\rho + \dfrac{\rho}{8} + \dfrac{\rho}{2} + \dfrac{\rho}{2} = \dfrac{105}{8}\rho$, dunque per avere $\sup_{(x,y)\in B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{4}{105}$, e di conseguenza $r = \dfrac{2}{105}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $e^{2g(x)} - \sin(x+g(x)) - 1 \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \dfrac{d}{dx}\left(e^{2g(x)} - \sin(x+g(x)) - 1\right)\Big|_{x=0} =$
$= 2g'(x)e^{2g(x)} - (1+g'(x))\cos(x+g(x))\Big|_{x=0} = g'(0) - 1 \Rightarrow g'(0) =$
$= 1$, perché $g(0) = 0$, e analogamente $0 = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{2g(x)} - \sin(x+g(x)) -\right.$
$\left.-1\right)\big|_{x=0} = 4g'^2(x)e^{2g(x)} + 2g''(x)e^{2g(x)} + (1+g'(x))^2\sin(x+g(x)) -$
$-g''(x)\cos(x+g(x))\big|_{x=0} = 4 + g''(0) \Rightarrow g''(0) = -4 \Rightarrow g(x) = g(0) +$
$+g'(0)x + \dfrac{g''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) = x + 2x^2 + o\left(x^2\right)$.

(c) $F(x,y) = xy^2 + y + \sin(xy) + \dfrac{e^x - 1 - x}{2}$ in $(0,0)$ è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 2xy + 1 +$
$+x\cos(xy)|_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r,\rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $r,\rho \leq 1$, abbiamo che $|F(x,0)| = \left|\dfrac{e^x - 1 - x}{2}\right| \leq \dfrac{|e^x - 1|}{2} + \dfrac{|x|}{2} \leq \dfrac{3}{2}r + \dfrac{r}{2} = 2r$, dunque posto $T = \dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = 1$, per avere $\sup_{x\in B_r(0)} |F(x,0)| \leq$
$\leq \dfrac{\rho}{2} = \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \dfrac{\rho}{4}$; inoltre $\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq |2xy| +$
$+|x\cos(xy)| = 2\,|xy| + |x||\cos(xy)| \leq 2r\rho + r \leq \dfrac{\rho^2}{2} + \dfrac{\rho}{4} \leq \dfrac{3}{4}\rho$, dunque per avere $\sup_{(x,y)\in B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{2}{3}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{6}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $xg^2(x) + g(x) + \sin(xg(x)) +$
$+\dfrac{e^x - 1 - x}{2} \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \dfrac{d}{dx}\left(xg^2(x) + g(x) + \sin(xg(x)) +\right.$
$\left.+\dfrac{e^x - 1 - x}{2}\right)\Big|_{x=0} = 2xg'(x)g(x) + g^2(x) + g'(x) + (g(x) +$
$+xg'(x))\cos(xg(x)) + \dfrac{e^x - 1}{2}\Big|_{x=0} = g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$, perché $g(0) =$
$= 0$, e analogamente $0 = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(xg^2(x) + g(x) + \sin(xg(x)) + \dfrac{e^x - 1}{2}\right.$
$\left.-\dfrac{x}{2}\right)\Big|_{x=0} = 2g(x)g'(x) + 2x\left(g'^2(x) + g(x)g''(x)\right) + 2g(x)g'(x) +$
$+g''(x) + (2g'(x) + xg''(x))\cos(xg(x)) - (g(x) + xg'(x))^2\sin(xg(x)) +$

$+ \left.\dfrac{e^x}{2}\right|_{x=0} = g''(0) - \dfrac{1}{2} \Rightarrow g''(0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow g(x) = g(0) + g'(0)x + \dfrac{g''(0)}{2}x^2 +$
$+ o\left(x^2\right) = \dfrac{x^2}{4} + o\left(x^2\right).$

(d) $F(x_1, x_2, y) = y^3 - \cosh(x_1 x_2)$ in $(0, 0, 1)$ è di classe C^1 in un intorno del punto $(0, 0, 1)$ con $F(0, 0, 1) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 1) = 3y^2\big|_{(x_1,x_2,y)=(0,0,1)} =$ $= 3 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho(1))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $r, \rho \leq 1$, abbiamo che $|F(x_1, x_2, 1)| =$ $= |1 - \cosh(x_1 x_2)| = \dfrac{|e^{x_1 x_2} + e^{-x_1 x_2} - 1 - 1|}{2} \leq \dfrac{|e^{x_1 x_2} - 1|}{2} +$ $+ \dfrac{|e^{-x_1 x_2} - 1|}{2} \leq \dfrac{3}{2}|x_1 x_2| + \dfrac{3}{2}|x_1 x_2| \leq \dfrac{3}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \leq \dfrac{3}{2}r^2 \leq \dfrac{3}{2}r$, dunque posto $T =$ $= \dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = \dfrac{1}{3}$, per avere $\sup\limits_{(x_1,x_2) \in B_r((0,0))} |F(x_1, x_2, 1)| \leq \dfrac{\rho}{6} = \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \dfrac{\rho}{9}$; inoltre $\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right| = |1 - y^2| = |1-$ $-y||1 + y| \leq \rho(1 + |y|) \leq 3\rho$, dunque per avere $\sup\limits_{(x_1,x_2,y) \in B_r((0,0)) \times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right| \leq$ $\leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{6}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{54}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $g^3(x_1, x_2) - \cosh(x_1 x_2) \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \dfrac{d}{dx_1}\left(g^3(x_1, x_2) -\right.$
$\left.- \cosh(x_1 x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3g^2(x_1, x_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) -$
$-x_2 \sinh(x_1 x_2)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) = 0$, perché
$g(0, 0) = 1$, analogamente $0 = \dfrac{d}{dx_2}\left(g^3(x_1, x_2) - \cosh(x_1 x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= 3g^2(x_1, x_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) - x_1 \sinh(x_1 x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) = 0,\ 0 = \dfrac{d^2}{dx_1^2}\left(g^3(x_1, x_2) - \cosh(x_1 x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= 6g(x_1, x_2)\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right)^2 + 3g^2(x_1, x_2)\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) -$
$- x_2^2 \cosh(x_1 x_2)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0, 0) = 0,\ 0 =$
$= \dfrac{d^2}{dx_1 dx_2}\left(g^3(x_1, x_2) - \cosh(x_1 x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3g^2(x_1, x_2)\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) +$
$+6g(x_1, x_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) - x_1 x_2 \cosh(x_1 x_2) -$
$- \sinh(x_1 x_2)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = -3\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) = 0$ e
$0 = \dfrac{d^2}{dx_2^2}\left(g^3(x_1, x_2) - \cosh(x_1 x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 6g(x_1, x_2)\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)^2 +$

$$+3g^2(x_1,x_2)\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)-x_1^2\cosh(x_1x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)}=3\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0)=0\Rightarrow g(x_1,x_2)=g(0,0)+\langle\nabla g(0,0),(x_1,x_2)\rangle+$$
$$+\frac{\langle H_g(0,0)(x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle}{2}+o\left(x_1^2+x_2^2\right)=1+o\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

(e) $F(x_1,x_2,y)=\log(1+x_1x_2y)-\arctan(x_1x_2)+e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y}-y$ in $(0,0,1)$ è di classe C^1 in un intorno del punto $(0,0,1)$ con $F(0,0,1)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)=\frac{x_1x_2}{1+x_1x_2y}-\left(x_1^2+x_2^2\right)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y}-1\Big|_{(x_1,x_2,y)=(0,0,1)}=$ $=-1\neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r,\rho>0$ e $g\in C^1(B_r((0,0)),B_\rho(1))$ tale che l'insieme di livello $\{F=0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $r,\rho\leq 1$, abbiamo che $|F(x_1,x_2,1)|=$ $=\left|\log(1+x_1x_2)+\arctan(x_1x_2)+e^{x_1^2+x_2^2}-1\right|\leq|1+\log(x_1x_2y)|+$ $+|\arctan(x_1x_2)|+\left|e^{x_1^2+x_2^2}-1\right|\leq|2x_1x_2|+\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+3\left(x_1^2+x_2^2\right)\leq$ $\leq\frac{9}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\leq\frac{9}{2}r^2$, dunque posto $T=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)}=-1$, per avere $\sup_{(x_1,x_2)\in B_r((0,0))}|F(x_1,x_2,1)|\leq\frac{\rho}{2}=\frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r=\frac{\sqrt{\rho}}{9}$; inoltre $\left|1-T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|=\left|\frac{x_1x_2}{1+x_1x_2y}-\left(x_1^2+x_2^2\right)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y}\right|\leq$ $\leq\left|\frac{x_1x_2}{1+x_1x_2y}\right|+\left|\left(x_1^2+x_2^2\right)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y}\right|\leq\frac{|x_1x_2|}{1-\frac{1}{2}}+3\left(x_1^2+x_2^2\right)\leq$ $\leq 4\left(x_1^2+x_2^2\right)=4r^2\leq\frac{4}{9}\rho$, dunque per avere $\sup_{(x_1,x_2,y)\in B_r(0)\times B_\rho((0,0))}\left|1-T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|\leq$ $\leq\frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho=1\leq\frac{9}{8}$, e di conseguenza $r=\frac{1}{3}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2))-\arctan(x_1x_2)+e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)}-$ $-g(x_1,x_2)\equiv 0\ \forall x\in B_r(0)$, allora $0=\frac{d}{dx_1}\,(\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2))-$ $-\arctan(x_1x_2)+e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)}-g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$
$$=\frac{x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)+x_2g(x_1,x_2)}{1+x_1x_2g(x_1,x_2)}-\frac{x_2}{1+x_1^2x_2^2}+\Bigg(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.$$
$$\left.+x_2^2\right)+2x_1g(x_1,x_2)\Big)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)}-\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$$
$=-\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0)\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0)=0$, analogamente $0=\frac{d}{dx_2}\,(\log(1+$ $+x_1x_2g(x_1,x_2))-\arctan(x_1x_2)+e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)}-g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$
$$=\frac{x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)+x_1g(x_1,x_2)}{1+x_1x_2g(x_1,x_2)}-\frac{x_1}{1+x_1^2x_2^2}+\Bigg(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.$$
$$\left.+x_2^2\right)+2x_2g(x_1,x_2)\Big)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)}-\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$$

$$= -\frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 0,\ 0 = \frac{d^2}{dx_1^2}\ (\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) -$$
$$- \arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$
$$= \frac{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))\left(2\cdot x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\right)}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} -$$
$$- \frac{\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_2g(x_1,x_2)\right)^2}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} + \frac{2x_1x_2^3}{\left(1+x_1^2x_2^2\right)^2} + \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\left(x_1^2 +\right.\right.\right.$$
$$\left. + x_2^2\right) + 2x_1g(x_1,x_2)\Big)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right) + 2x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) +$$
$$\left. + 2g(x_1,x_2) + 2x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right) e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$
$$= 2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) = 2,\ 0 = \frac{d^2}{dx_1dx_2}\ (\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) -$$
$$- \arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(0,0)} =$$
$$= \frac{\left(x_1\frac{\partial g}{\partial x_1} + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2} + x_2\frac{\partial g}{\partial x_2} + g(x_1,x_2)\right)(1+x_1x_2g(x_1,x_2))}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} -$$
$$- \frac{\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1} + x_2g(x_1,x_2)\right)\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1g(x_1,x_2)\right)}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} +$$
$$+ \frac{x_1^2x_2^2-1}{\left(1+x_1^2x_2^2\right)^2} + \left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right) + 2x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) +\right.\right.$$
$$\left. + 2x_1\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right) + 2x_1g(x_1,x_2)\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2 +\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + x_2^2\right) + 2x_2g(x_1,x_2)\right)\right) e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1x_2}(x_1,x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$
$$= -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1x_2}(0,0) = 0 \text{ e } 0 = \frac{d^2}{dx_2^2}\ (\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) -$$
$$\arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$
$$= \frac{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))\left(2x_1\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\right)}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} -$$
$$- \frac{\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1g(x_1,x_2)\right)^2}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} + \frac{2x_1^3x_2}{\left(1+x_1^2x_2^2\right)^2} + \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2 +\right.\right.\right.$$
$$\left. + x_2^2\right) + 2x_2g(x_1,x_2)\Big)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\left(x_1^2 +\right.$$
$$\left. + x_2^2\right) + 2x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + 2g(x_1,x_2) + 2x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Big) e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} -$$
$$- \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) = 2 \Rightarrow g(x_1,x_2) =$$
$$= g(0,0) + \langle \nabla g(0,0), (x_1,x_2)\rangle + \frac{\langle H_g(0,0)(x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle}{2} + o\left(x_1^2 +\right.$$
$$\left. + x_2^2\right) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + o\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

2. $F(x, y_1, y_2) = \left(\dfrac{x + y_2}{1 + x + y_1^2}, \dfrac{x + y_1}{1 + x + y_2^2} \right)$.

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine, inoltre $F(0, 0, 0) = (0, 0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 0) = \left. \left(\begin{array}{cc} \frac{-2y_1(x+y_2)}{\left(1+x+y_1^2\right)^2} & \frac{1}{1+x+y_1^2} \\ \frac{1}{1+x+y_2^2} & \frac{-2y_2(x+y_1)}{\left(1+x+y_2^2\right)^2} \end{array} \right) \right|_{(x,y_1,y_2)=(0,0,0)} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$ è invertibile (con $T = \left(\dfrac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho((0, 0)))$ tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0 \ \forall x \in B_r(0)$.

(b) Supponendo $r \le \dfrac{1}{2}$ e $\rho \le 1$ abbiamo che $\|F(x, 0, 0)\| = \sqrt{\left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^2} = \sqrt{2}\dfrac{|x|}{|1 + x|} \le \dfrac{3}{2}\dfrac{|x|}{1 - \frac{1}{2}} = 3|x| \le 3r$, dunque per avere $\sup\limits_{x\in B_r(0)} |F(x, 0, 0)| \le \dfrac{\rho}{4} = \dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty} \le \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente prendere $r = \dfrac{\rho}{12}$; inoltre, $\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \frac{-2y_1(x+y_2)}{\left(1+x+y_1^2\right)^2} & \frac{1}{1+x+y_1^2} \\ \frac{1}{1+x+y_2^2} & \frac{-2y_2(x+y_1)}{\left(1+x+y_2^2\right)^2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{x+y_2^2}{1+x+y_2^2} & \frac{2y_2(x+y_1)}{\left(1+x+y_2^2\right)^2} \\ \frac{2y_1(x+y_2)}{\left(1+x+y_1^2\right)^2} & \frac{x+y_1^2}{1+x+y_1^2} \end{array} \right)$, dunque poiché $\left| \dfrac{x + y_2^2}{1 + x + y_2^2} \right| \le \dfrac{|x| + y_1^2 + y_2^2}{1 - \frac{1}{2}} \le 2r + 2\rho^2 \le \dfrac{\rho}{6} + 2\rho = \dfrac{13}{6}\rho$, $\left| \dfrac{2y_2(x + y_1)}{\left(1 + x + y_2^2\right)^2} \right| \le \dfrac{2|y_2|(|x| + |y_1|)}{1 - \frac{1}{2}} \le 4(2\rho(r + \rho)) = 16\rho^2 + 16r\rho = \dfrac{52}{3}\rho^2 \le \dfrac{52}{3}\rho$, $\left| \dfrac{2y_1(x + y_2)}{\left(1 + x + y_1^2\right)^2} \right| \le \dfrac{2|y_1|(|x| + |y_2|)}{1 - \frac{1}{2}} \le 4(2\rho(r + \rho)) = 4\rho^2 + 4r\rho = \dfrac{52}{3}\rho^2 \le \dfrac{52}{3}\rho$ e $\left| \dfrac{x + y_1^2}{1 + x + y_2^2} \right| \le \dfrac{|x| + y_1^2 + y_2^2}{1 - \frac{1}{2}} \le 2r + 2\rho^2 \le \dfrac{\rho}{6} + 2\rho = \dfrac{13}{6}\rho$, per avere $\sup\limits_{(x,y_1,y_2)\in B_r(0)\times B_\rho(0,0)} \left\| \mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2) \right\| \le 2 \sup\limits_{(x,y_1,y_2)\in B_r(0)\times B_\rho(0,0)} \left\| \mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2) \right\|_\infty = \dfrac{104}{3}\rho \le \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{3}{208}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{832}$.

(c) Poichè $\dfrac{x + g_2(x)}{1 + x + g_1^2(x)} \equiv 0 \ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \left. \dfrac{d}{dx} \dfrac{x + g_2(x)}{1 + x + g_1^2(x)} \right|_{x=0} = \left. \dfrac{(1 + g_2'(x)) \left(1 + x + g_1^2(x)\right) - (x + g_2(x))(1 + 2g_1'(x)g_1(x))}{\left(1 + x + g_1^2(x)\right)^2} \right|_{x=0} = 1 + g_2'(0) \Rightarrow g_2'(0) = -1$, perché $g_1(0) = 0 = g_2(0)$, dunque $g_2(x) = g_2(0) + g_2'(0)x + o(x) = -x + o(x)$; analogamente, $0 = \left. \dfrac{d}{dx} \dfrac{x + g_1(x)}{1 + x + g_2^2(x)} \right|_{x=0} = \dfrac{(1 + g_1'(x)) \left(1 + x + g_2^2(x)\right)}{\left(1 + x + g_2^2(x)\right)^2} -$

$$-\left.\frac{(x+g_1(x))(1+2g_2'(x)g_2(x))}{\left(1+x+g_2^2(x)\right)^2}\right|_{x=0} = 1+g_1'(0) \Rightarrow g_1'(0) = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g_1(x) = -x + o(x).$$

3. (a) $x_n(k) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n(k+1)}}\right)}{\sqrt{k+1}} \stackrel{\ell^p}{\to} x(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ $\forall p \geq 1$, perché $\|x_n - x\|_p \leq$
$$\leq \|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n(k+1)}}\right)}{\sqrt{k+1}} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2n(k+1)}}{\sqrt{k+1}} =$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0.$$

(b) $x_n(k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2^k+1)^j} = \frac{1}{2^k+1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(2^k+1)^j} = \frac{1}{2^k+1}\frac{1-\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^n}{1-\frac{1}{2^k+1}} =$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^n}{2^k} \stackrel{\ell^p}{\to} x(k) = \frac{1}{2^k} \ \forall p \geq 1, \text{ perché } \|x_n - x\|_p \leq \|x_n - x\|_1 =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1-\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^{n+1}}{2^k} - \frac{1}{2^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0.$$

4. $\arctan\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = x$: posta $\Phi(x) = \arctan\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$, si ha che $\Phi\left(\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, e inoltre $|\Phi'(x)| = \left|\dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(1+\left(1+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)}\right| \leq \dfrac{1}{2}$, dunque $|\Phi(x)-\Phi(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{2}$ e quindi Φ è una contrazione in $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ e pertanto, essendo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$, Φ ha un unico punto fisso, cioè esiste un'unico valore $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ che risolve l'equazione $\arctan\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = \Phi(x) = x$.

5. $\begin{cases} x_0 = a \geq 1 \\ x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}+1} \end{cases}$: posta $\Phi(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$, si ha che $\Phi([1,+\infty)) \subset$ $\subset [1,+\infty)$ e inoltre $|\Phi'(x)| = \left|-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right| \leq \dfrac{1}{4}$ se $x \geq 1$, dunque $|\Phi(x) -$ $-\Phi(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{4}$ $\forall x,y \in [1,+\infty)$; quindi, essendo $[1,+\infty)$ un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$, per il teorema delle contrazioni l'equazione $x = \Phi(x)$ ha un'unica soluzione in $[1,+\infty)$ e la soluzione è data dal limite della successione $x_n = \Phi(x_{n-1})$, per qualunque scelta di $x_0 \in [1,+\infty)$; ciò equivale a dire che il limite della successione di partenza è l'unica soluzione maggiore di 1 dell'equazione $x = 1 + \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + x = x + 1 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 2$, che è

proprio $\sqrt{2}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 4 (17 Marzo 2010)
Teoremi della funzione implicita e della funzione inversa

1. $F(x_1, x_2, y) = e^{x_1x_2y} + \cos\left(x_2^2\right) - \dfrac{1}{1+x_1} - \dfrac{1}{1+y}$.

   (a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine, inoltre $F(0,0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = x_1x_2e^{x_1x_2y} + \dfrac{1}{(1+y)^2}\Big|_{(x_1,x_2,y)=(0,0,0)} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho(0))$ tale che $F(x_1, x_2, g(x)) \equiv 0\ \forall x \in B_r((0,0))$.

   (b) Supponendo $r, \rho \leq \dfrac{1}{2}$, si ha che $|F(x_1, x_2, 0)| = \left|1 + \cos\left(x_2^2\right) - \dfrac{1}{1+x_1} - \right.$ $\left. -1\right| \leq \left|1 - \cos\left(x_2^2\right)\right| + \left|\dfrac{x_1}{1+x_1}\right| \leq \dfrac{x_2^4}{2} + \dfrac{x_1}{1-\frac{1}{2}} \leq \dfrac{r^4}{2} + 2r \leq \dfrac{5}{2}r$, dunque posto $T = \dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)} = 1$ per avere $\sup\limits_{x \in B_r(0)} |F(x_1, x_2, 0)| \leq \dfrac{\rho}{2} = \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente prendere $r = \dfrac{\rho}{5}$; inoltre, $\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, y)\right| = |1 -$ $-x_1x_2e^{x_1x_2y} - \dfrac{1}{(1+y)^2}\Big| \leq |x_1x_2|e^{x_1x_2y} + \dfrac{y^2 + 2|y|}{(1+y)^2} \leq \dfrac{3}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) +$ $+\dfrac{\rho^2 + 2\rho}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \dfrac{3}{2}r^2 + 12\rho \leq \dfrac{3}{2}r + 12\rho \leq \dfrac{123}{10}\rho$, dunque per avere $\sup\limits_{(x_1,x_2,y) \in B_r((0,0)) \times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, y)\right| \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{5}{123}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{123}$.

   (c) Essendo $e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} + \cos\left(x_2^2\right) - \dfrac{1}{1+x_1} - \dfrac{1}{1+g(x_1,x_2)} \equiv 0\ \forall x \in$ $\in B_r(0,0)$, allora $0 = \dfrac{d}{dx_1}\left(e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} + \cos\left(x_2^2\right) - \dfrac{1}{1+x_1} - \right.$ $\left. - \dfrac{1}{1+g(x_1,x_2)}\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left(x_2g(x_1,x_2) + x_1x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} +$ $+\dfrac{1}{(1+x_1)^2} + \dfrac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{(1+g(x_1,x_2))^2}\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 1 + \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) =$ $= -1$, analogamente $0 = \dfrac{d}{dx_2}\left(e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} + \cos\left(x_2^2\right) - \dfrac{1}{1+x_1} - \right.$ $\left. - \dfrac{1}{1+g(x_1,x_2)}\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left(x_1g(x_1,x_2) + x_1x_2\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} -$ $-2x_2\sin\left(x_2^2\right) + \dfrac{\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{(1+g(x_1,x_2))^2}\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) =$

$$= 0,\ \frac{d^2}{dx_1^2}\left(e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} + \cos\left(x_2^2\right) - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+g(x_1,x_2)}\right)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \left(\left(x_2g(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)^2 + 2x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) +\right.$$

$$\left. + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\right)e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} - \frac{2}{(1+x_1)^3} + \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)(1+g(x_1,x_2))^2}{(1+g(x_1,x_2))^4} -$$

$$- \frac{2\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)^2(1+g(x_1,x_2))}{(1+g(x_1,x_2))^4}\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) = 4,\ 0 = \frac{d^2}{dx_1dx_2}\left(e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} + \cos\left(x_2^2\right) - \frac{1}{1+x_1} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1+g(x_1,x_2)}\right)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left(\left(g(x_1,x_2) + x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) +\right.\right.$$

$$\left. + x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}\right) + \left(x_2g(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)(x_1g(x_1,x_2) +$$

$$\left.\left. + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)\right)e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} + \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(1+g(x_1,x_2))^2}{(1+g(x_1,x_2))^4} -$$

$$- \frac{2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)(1+g(x_1,x_2))}{(1+g(x_1,x_2))^4}\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) = 0 \text{ e } \frac{d^2}{dx_2^2}\left(e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} + \cos\left(x_2^2\right) - \frac{1}{1+x_1} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1+g(x_1,x_2)}\right)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left(\left(x_1g(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 2x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\right)e^{x_1x_2g(x_1,x_2)} - 2\sin\left(x_2^2\right) -$$

$$- 4x_2^2\cos\left(x_2^2\right) + \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)(1+g(x_1,x_2))^2 - 2\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^2(1+g(x_1,x_2))}{(1+g(x_1,x_2))^4}\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) = 0 \Rightarrow g(x_1,x_2) = g(0,0) + \langle \nabla g(0,0), (x_1,x_2)\rangle +$$

$$+ \frac{\langle H_g(0,0)(x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle}{2} + o\left(x_1^2+x_2^2\right) = 1 - x_1 + 2x_1^2 + o\left(x_1^2 +\right.$$

$$\left. + x_2^2\right).$$

2. $F(x,y_1,y_2) = \left(\log y_2 + e^{y_1} - \cos x, \arctan(y_1y_2) - \dfrac{\sin x}{2+y_1^2}\right)$.

   (a) F è di classe C^1 in un intorno del punto $(0,0,1)$, inoltre $F(0,0,1) = (0,0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,1) = \begin{pmatrix} e^{y_1} & \frac{1}{y_2} \\ \frac{y_2}{1+y_1^2y_2^2} - \frac{2y_1\sin x}{\left(2+y_1^2\right)^2} & \frac{y_1}{1+y_1^2y_2^2}\end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y_1,y_2)=(0,0,1)} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, è invertibile (con $T = \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r,\rho > 0$ e $g \in$ $\in C^1(B_r(0), B_\rho((0,1)))$ tale che $F(x,g_1(x),g_2(x)) \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$.

(b) Supponendo $r \leq 1$ e $\rho \leq \dfrac{1}{2}$, si ha che $\|F(x,0,1)\| = \sqrt{(1-\cos x)^2 + \dfrac{\sin^2 x}{4}} \leq$
$\leq \sqrt{\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{4}} \leq \sqrt{\dfrac{r^4}{4} + \dfrac{r^2}{2}} \leq \dfrac{r}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{3}{4} r$, dunque per avere $\sup\limits_{x \in B_r(0)} \|F(x,0,1)\| \leq$
$\leq \dfrac{\rho}{4} = \dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty} \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente prendere $r = \dfrac{\rho}{3}$; inoltre, $\mathbb{I}_2 -$
$-T \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y_2}{1+y_1^2 y_2^2} - \frac{2y_1 \sin x}{(2+y_1^2)^2} & -\frac{y_1}{1+y_1^2 y_2^2} \\ \frac{y_2}{1+y_1^2 y_2^2} + \frac{2y_1 \sin x}{(2+y_1^2)^2} - e^{y_1} & 1 - \frac{1}{y_2} + \frac{y_1}{1+y_1^2 y_2^2} \end{pmatrix}$, dunque
poiché $\left| 1 - \dfrac{y_2}{1+y_1^2 y_2^2} - \dfrac{2y_1 \sin x}{(2+y_1^2)^2} \right| \leq \dfrac{|1-y_2| + y_1^2 y_2^2}{1+y_1^2 y_2^2} + \dfrac{2|y_1||\sin x|}{(2+y_1^2)^2} \leq$
$\leq |1-y_2| + y_1^2 \dfrac{9}{4} + \dfrac{2|y_1||x|}{4} \leq \rho + \dfrac{9}{4}\rho^2 + \dfrac{r\rho}{2} \leq \rho + \dfrac{9}{4}\rho + \dfrac{\rho^2}{6} = \dfrac{41}{12}\rho$,
$\left| -\dfrac{y_1}{1+y_1^2 y_2^2} \right| \leq |y_1| \leq \rho$, $\left| \dfrac{y_2}{1+y_1^2 y_2^2} - \dfrac{2y_1 \sin x}{(2+y_1^2)^2} - e^{y_1} \right| \leq \dfrac{|1-y_2| + y_1^2 y_2^2}{1+y_1^2 y_2^2} +$
$+ \dfrac{2|y_1||\sin x|}{(2+y_1^2)^2} + |1 - e^{y_1}| \leq |1-y_2| + y_1^2 \dfrac{9}{4} + \dfrac{|y_1||x|}{2} + 3|y_1| \leq \rho + \dfrac{9}{4}\rho^2 +$
$+ \dfrac{r\rho}{2} + 3\rho \leq 4\rho + \dfrac{9}{4}\rho + \dfrac{\rho^2}{6} \leq \dfrac{77}{12}\rho$ e $\left| 1 - \dfrac{1}{y_2} + \dfrac{y_1}{1+y_1^2 y_2^2} \right| \leq \dfrac{|y_2 - 1|}{|y_2|} +$
$+ |y_1| \leq 2|y_2 - 1| + |y_1| \leq 3\rho$, dunque per avere $\sup\limits_{(x,y_1,y_2) \in B_r(0) \times B_\rho(0,0)} \|\mathbb{I}_2 -$
$T \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2)\| \leq 2 \sup\limits_{(x,y_1,y_2) \in B_r(0) \times B_\rho(0,0)} \left\| \mathbb{I}_2 - T \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2) \right\|_\infty \leq$
$\leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{3}{77}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{77}$.

(c) Essendo $\log(g_2(x)) + e^{g_1(x)} - \cos x \equiv 0 \; \forall x \in B_r(0)$, allora $0 =$
$= \dfrac{d}{dx} \left(\log(g_2(x)) + e^{g_1(x)} - \cos x \right)\Big|_{x=0} = \Bigg(g_1'(x) e^{g_1(x)} + \dfrac{g_2'(x)}{g_2(x)} +$
$+ \sin x)\big|_{x=0} = g_1'(0) + g_2'(0) \Rightarrow g_1'(0) = -g_2'(0)$; analogamente, essendo
$0 = \dfrac{d}{dx} \arctan(g_1(x) g_2(x)) + \dfrac{\sin x}{2 + g_1^2(x)}\Bigg|_{x=0} = \dfrac{g_1(x) g_1'(x) + g_2(x) g_2'(x)}{1 + g_1^2(x) g_2^2(x)} -$
$- \dfrac{\cos x}{2 + g_1^2(x)} + \dfrac{2 \sin x g_1(x) g_1'(x)}{(2 + g_1^2(x))}\Bigg|_{x=0} = g_1'(0) - \dfrac{1}{2} \Rightarrow g_1'(0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow g_2'(0) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow g_1(x) = \dfrac{x}{2} + o(x)$ e $g_2(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$.

3. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(y) = y^2 + y + \cosh y$.

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0) = 1$, inoltre $F'(0) = 2y + 1 +$
$+ \sinh y|_{y=0} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione inversa $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(1), B_\rho(0))$ tale che $F(g(u)) = u \; \forall u \in B_r(1)$.

(b) Supponendo $\rho \leq 1$, posto $T = \dfrac{1}{F'(0)} = 1$ si ha che $|1 - TF'(y)| = |-2y| +$
$+ |\sinh y| \leq 2|y| + |\sinh y| \leq 5|y| \leq 5\rho$, dunque affinché $\sup\limits_{y \in B_r(0)} |1-$
$-TF'(y)| = 5\rho \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{10}$ e $r = \dfrac{\rho}{2|T|} = \dfrac{\rho}{2} =$

$= \dfrac{1}{20}$.

(c) Essendo $F(g(u)) = u\ \forall u \in B_r(1)$, allora $1 = \dfrac{d}{du}F(g(u)) = F'(g(u))g'(u)$ $\forall u \in B_r(1) \Rightarrow g'(1) = \dfrac{1}{F'(0)} = 1$ e analogamente $0 = \dfrac{d^2}{du^2}F(g(u)) =$ $= F''(g(u))g'(u)^2 + F'(g(u))g''(u) \Rightarrow g''(1) = -\dfrac{F''(0)g'(1)^2}{F'(0)} = -3$, perché $F''(0) = 2 + \cosh y|_{y=0} = 3$, dunque $g(u) = g(1) + g'(1)(u-1) +$ $\dfrac{g''(1)}{2}(u-1)^2 + o\left((u-1)^2\right) = (u-1) - \dfrac{3}{2}(u-1)^2 + o\left((u-1)^2\right)$.

4. $F(x,y) = \left(\sqrt{1+x^2} - e^{\arctan y}, x + x^3 + y^2\right)$.

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = (0,0)$, inoltre $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0) = \left.\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & -\frac{e^{\arctan y}}{1+y^2} \\ 1+3x^2 & 2y \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T = \left(\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione inversa $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)\ \forall (u,v) \in B_r((0,0))$.

(b) Supponendo $\rho \leq 1$, si ha che $\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} -3x^2 & -2y \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & 1 - \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2} \end{pmatrix}$, dunque poiché $\left|-3x^2\right| \leq 3\rho^2 \leq 3\rho$, $|-2y| \leq 2\rho$, $\left|\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| \leq 2|x| \leq 2\rho$ e $\left|1 - \dfrac{e^{\arctan y}}{1+y^2}\right| \leq \dfrac{y^2}{1+y^2} + \dfrac{\left|1 - e^{\arctan y}\right|}{1+y^2} \leq y^2 + \left|1 - e^{\arctan y}\right| \leq \rho^2 +$ $+3|y| \leq 4\rho$, dunque per avere $\sup\limits_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y)\right\| \leq$ $\leq 2 \sup\limits_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y)\right\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{16}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{64} = \dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty} \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|}$.

(c) Essendo $F(g(u,v)) = (u,v)\ \forall (u,v) \in B_r((0,0))$, allora $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(g(u,v))\dfrac{\partial g}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial(u,v)}(0,0) =$ $= \left(\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1(u,v) = g_1(0,0) +$ $+ \left\langle \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial u}(0,0), \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(0,0)\right), (u,v) \right\rangle + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = v + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$ e analogamente $g_2(u,v) = -u + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$.

5. $F(x,y) = \left(\arctan x + \dfrac{x^2}{2} - \ln\cos y, y + \dfrac{e^{xy}}{1+y^2} + \cosh\left(x^2+y^2\right)\right)$.

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = (0,2)$, inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)=\left.\begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2}+x & \tan y \\ \frac{ye^{xy}}{1+y^2}+2x\sinh\left(x^2+y^2\right) & 1+\frac{xe^{xy}\left(1+y^2\right)-2ye^{xy}}{(1+y^2)^2}+2y\sinh\left(x^2+y^2\right)\end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)}$$
$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T=\left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione inversa $\exists r,\rho>0$ e $g\in C^1(B_r((0,0)),B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v))=(u,v)\ \forall(u,v)\in B_r((0,0))$.

(b) Supponendo $\rho\le 1$, si ha che $\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial(x,y)}=$
$$=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{1+x^2}-x & -\tan y \\ -\frac{ye^{xy}}{1+y^2}-2x\sinh\left(x^2+y^2\right) & -\frac{xe^{xy}\left(1+y^2\right)-2ye^{xy}}{(1+y^2)^2}-2y\sinh\left(x^2+y^2\right)\end{pmatrix},$$
dunque poiché $\left|1-\frac{1}{1+x^2}-x\right|\le\frac{x^2}{1+x^2}+|x|\le x^2+|x|\le\rho^2+\rho\le$ $\le 2\rho$, $|-\tan y|\le 2|y|\le 2\rho$, $\left|-\frac{ye^{xy}}{1+y^2}-2x\sinh\left(x^2+y^2\right)\right|\le|y|e^{xy}+$ $+2|x|\sinh\left(x^2+y^2\right)\le 3|y|+6|x|\left(x^2+y^2\right)\le 3\rho+6\rho^3\le 6\rho$ e $\left|-\frac{xe^{xy}\left(1+y^2\right)-2ye^{xy}}{\left(1+y^2\right)^2}-2y\sinh\left(x^2+y^2\right)\right|\le|x|e^{xy}+2|y|e^{xy}+$ $+2|y|\sinh\left(x^2+y^2\right)\le 3|x|+6|y|+6|y|\left(x^2+y^2\right)\le 9\rho+6\rho^3\le 15\rho$, dunque per avere $\sup\limits_{(x,y)\in B_\rho((0,0))}\left\|\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y)\right\|\le 2\left\|\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y)\right\|_\infty\le$ $\le\frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho=\frac{1}{30}$, e di conseguenza $r=\frac{1}{120}=\frac{\rho}{4\|T\|_\infty}\le$ $\le\frac{\rho}{2\|T\|}$.

(c) Essendo $F(g(u,v))=(u,v)\ \forall(u,v)\in B_r((0,2))$, allora $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(g(u,v))\frac{\partial g}{\partial(u,v)}(u,v)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial(u,v)}(0,2)=$ $\left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, inoltre $0=\left.\frac{d^2}{du^2}u\right|_{(u,v)=(0,2)}=$
$$=\left.\frac{d^2}{du^2}\left(\arctan(g_1(u,v))+\frac{g_1^2(u,v)}{2}-\ln\cos(g_2(u,v))\right)\right|_{(u,v)=(0,2)}=$$
$$=\frac{\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}(u,v)\left(1+g_1^2(u,v)\right)}{\left(1+g_1^2(u,v)\right)^2}-\frac{2g_1(u,v)\left(\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v)\right)^2}{\left(1+g_1^2(u,v)\right)^2}+g_1(u,v)\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}(u,v)+$$
$$\left.+\left(\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v)\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v)\right)^2}{\cos^2(g_2(u,v))}+\tan(g_2(u,v))\frac{\partial^2 g_2}{\partial u^2}(u,v)\right|_{(u,v)=(0,2)}=$$
$=\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}(0,2)+1\Rightarrow\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}(0,2)=-1$, analogamente $0=\left.\frac{d^2}{dudv}u\right|_{(u,v)=(0,2)}=$
$$=\left.\frac{d^2}{dudv}\left(\arctan(g_1(u,v))+\frac{g_1^2(u,v)}{2}-\ln\cos(g_2(u,v))\right)\right|_{(u,v)=(0,2)}=$$
$$\frac{\frac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v}(u,v)\left(1+g_1^2(u,v)\right)}{\left(1+g_1^2(u,v)\right)^2}-\frac{2g_1(u,v)\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v)\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)}{\left(1+g_1^2(u,v)\right)^2}+g_1(u,v)\frac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v}(u,v)+$$

$$+\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v)\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)-\frac{\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v)\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)}{\cos^2(g_2(u,v))}+\tan(g_2(u,v))\frac{\partial^2 g_2}{\partial u\partial v}(u,v)\Bigg|_{(u,v)=(0,2)}=$$

$$=\frac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v}(0,2)\Rightarrow\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}(0,2)=0\text{ e }0=\frac{d^2}{dv^2}u\Bigg|_{(u,v)=(0,2)}=\frac{d^2}{dv^2}\left(\arctan(g_1(u,v))+\right.$$

$$\left.+\frac{g_1^2(u,v)}{2}-\ln\cos(g_2(u,v))\right)\Bigg|_{(u,v)=(0,2)}=\frac{\frac{\partial^2 g_1}{\partial v^2}(u,v)\left(1+g_1^2(u,v)\right)}{\left(1+g_1^2(u,v)\right)^2}-$$

$$-\frac{2g_1(u,v)\left(\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)\right)^2}{\left(1+g_1^2(u,v)\right)^2}+g_1(u,v)\frac{\partial^2 g_1}{\partial v^2}(u,v)+\left(\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)\right)^2+$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)\right)^2}{\cos^2(g_2(u,v))}+\tan(g_2(u,v))\frac{\partial^2 g_2}{\partial v^2}(u,v)\Bigg|_{(u,v)=(0,2)}=\frac{\partial^2 g_1}{\partial v^2}(0,2)+$$

$$+1\Rightarrow\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2}(0,2)=-1\Rightarrow g_1(u,v)=g_1(0,2)+\left\langle\left(\frac{\partial g_1}{\partial u}(0,2),\frac{\partial g_1}{\partial v}(0,2)\right),(u,v-2)\right\rangle+$$

$$+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial v^2}\end{pmatrix}(u,v-2),(u,v-2)\right\rangle}{2}+o\left(u^2+v^2\right)=u-\frac{u^2}{2}-$$

$$-\frac{(v-2)^2}{2}+o\left(u^2+(v-2)^2\right).$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

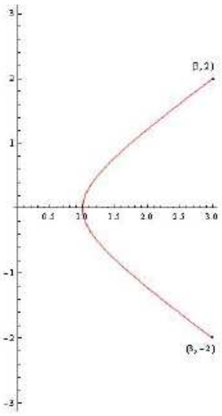
Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 5 (24 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati

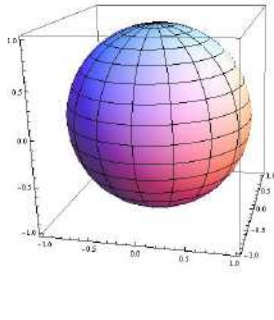
1. $f(x,y) = x - y \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1,\ 0 \le x \le 3\}$.



Notiamo che $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0,\ 0 \le x \le 3\}$ dove $g(x,y) = x^2 - 2y^2 - 1$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo/minimo di f nell'insieme $\{g = 0\}$ sono soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$. $\nabla f(x,y) = (1,-1)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, -4y)$ quindi il sistema diventa $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = -4\lambda y \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

Dalle prime due equazioni ricaviamo $\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{4y}$ da cui $x = 2y$. Sostituendo nell'ultima equazione troviamo che $4y^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = 2y = \pm\sqrt{2}$. Le soluzioni del sistema sono quindi $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Il punto $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ non è un punto di E quindi l'unico punto critico vincolato di f su E è $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Oltre a questo punto vanno considerati anche gli estremi di E cioè i punti di $(3,2)$ e $(3,-2)$. Dunque i possibili punti di massimo/minimo per f su E sono $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(3,2)$ e $(3,-2)$. $f(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(3,2) = 1$ e $f(3,-2) = 5$. Dunque $\min_E f = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\max_E f = 5$.

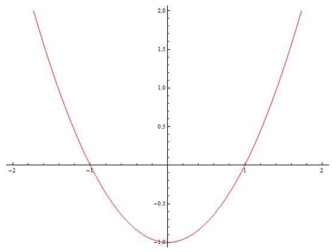
2. $f(x,y,z) = 2x + 3y + 6z \quad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



Sia $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Siccome $E = \{g = 0\}$ i punti di massimo/minimo per f su E sono tra le soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$. Dato che $\nabla f(x,y,z) = (2,3,6)$ e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ il sistema diventa $\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 3 = 2\lambda y \\ 6 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

Dalle prime due equazioni si ricava che $\lambda = \frac{1}{x} = \frac{3}{2y}$ cioè $x = \frac{2}{3}y$. Dalla seconda e dalla terza equazione troviamo invece che $2\lambda = \frac{3}{y} = \frac{6}{z}$ da cui $z = 2y$. Sostituendo le due relazioni trovate nell'ultima equazione ricaviamo che $\frac{4}{9}y^2 + y^2 + 4y^2 = 1 \Longrightarrow \frac{49}{9}y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{3}{7}$, $x = \frac{2}{3}y = \pm\frac{2}{7}$ e $z = 2y = \pm\frac{6}{7}$. Le soluzioni del sistema sono i punti $(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$ e $(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7})$. $f(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}) = 7$ e $f(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}) = -7$ quindi $\max_E f = 7$ e $\min_E f = -7$.

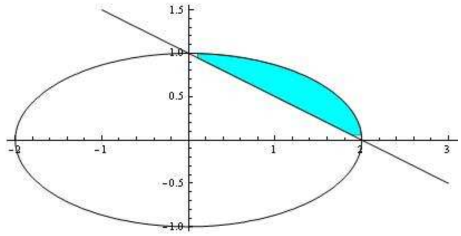
3. Sia P la parabola di equazione $y = x^2 - 1$.



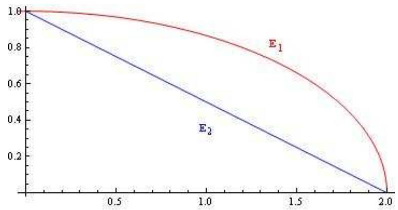
I punti di P che distano meno dall'origine sono i punti di minimo su P della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$. Studiamo dunque f su P. Dato che $P = \{g = 0\}$ dove $g(x,y) = y - x^2 + 1$ per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti critici vincolati di f sono tra le soluzioni del sistema $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} 2x = -2\lambda x \\ 2y = \lambda \\ y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$

Dalla prima equazione otteniamo che $2x(1+\lambda) = 0$ da cui $x = 0$ o $\lambda = -1$. Se $x = 0$ dall'ultima equazione si ricava che $y = 1$ metre se $\lambda = -1$ dalla seconda equazione si ottiene $y = -\frac{1}{2}$ e sostituendo nella terza $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le soluzioni del sistema sono dunque $(0,1)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$. Dato che $f(0,1) = 1$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ possiamo dire che i punti di P che distano meno dall'origine sono $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$.

4. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 2, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ $\quad f(x,y,z) = e^{xy}$.



E è l'intersezione tra l'ellisse $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e il semipiano $x + 2y \geq 2$. I punti di massimo/minimo di f su E possono trovarsi o all'interno di E oppure sul bordo di E. I punti di massimo/minimo interni ad E sono punti stazionari di f cioè punti in cui $\nabla f = 0$. $\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy}) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} ye^{xy} = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{cases}$. L'unica soluzione di questo sistema è il punto $(0,0)$ che però non è un punto di E (non soddisfa la condizione $x+2y \geq 2$) quindi non ci sono punti critici interni ad E. Cerchiamo ora i massimi/minimi di f su ∂E. $\partial E = E_1 \cup E_2$ dove $E_1 = \{(x,y) \mid x^2+4y^2 = 4, x+2y \geq 2\}$ è la porzione dell'ellisse $x^2+4y^2 = 4$ contenuta nel semipiano $x+2y \geq 2$ mentre $E_2 = \{(x,y) \mid x+2y = 2, x^2+4y^2 \leq 4\}$ è la porzione della retta $x+2y = 2$ contenuta all'interno dell'ellisse $x^2+4y^2 \leq 4$.



I punti critici di f su E_1 sono soluzioni in E del sistema $\begin{cases} ye^{xy} = 2\lambda x \\ xe^{xy} = 8\lambda y \\ x^2+4y^2 = 4 \end{cases}$.

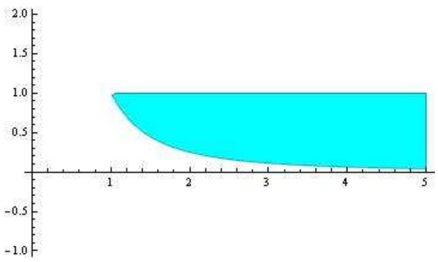
Se $x = 0$ dalla prima equazione toviamo $y = 0$ ma il punto $(0,0)$ non soddisfa l'ultima equazione quindi in questo caso il sistema non ha soluzione. Analogamente se $y = 0$ dalla seconda equazione ricaviamo $x = 0$ il che come prima non è possibile. Se $x, y \neq 0$ dalle prime due equazione troviamo che $\lambda e^{-xy} = \frac{y}{2x} = \frac{x}{8y}$ da cui $x^2 = 4y^2$. Sostituendo nell'ultima equazione si trova $8y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = \pm\sqrt{2}$. Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Tra questi solo $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è un punto di E.

I punti critici di f su E_2 sono soluzioni in E del sistema $\begin{cases} ye^{xy} = \lambda \\ xe^{xy} = 2\lambda \\ x+2y = 2 \end{cases}$. Dalle prime due equazioni troviamo $x = 2y$ quindi dalla terza $4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ e $x = 1$. L'unica soluzione del sistema è quindi $(1, \frac{1}{2})$.

Infine dobbiamo considerare i punti di $E_1 \cap E_2$ cioè le soluzioni di $\begin{cases} x^2+4y^2 = 4 \\ x+2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} x = 2-2y \\ (2-2y)^2+4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2y \\ 8y^2-8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2y \\ y(y-1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 1$ o $y = 0$. Se $y = 1$ troviamo $x = 0$ mentre se $y = 0$ troviamo $x = 2$. Le soluzioni dell'ultimo sistema sono dunque $(0,1)$ e $(2,0)$. Riassumendo i possibili punti di massimo/minimo di f su E sono i punti $(0,1)$, $(2,0)$, $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(1, \frac{1}{2})$.

$f(0,1) = f(2,0) = 1$, $f(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = e$ ed $f(1, \frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}}$ pertanto $\max_E f = e$ mentre $\min_E f = 1$.

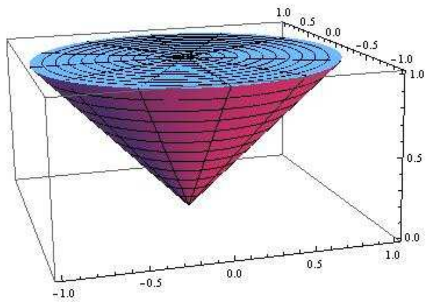
5. $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y \geq 1, x \geq 0, y \leq 1\right\} \quad f(x,y) = x+y^2$.



Osserviamo per prima cosa che f non è superiormente limitata. Infatti $\forall\ n \geq 1$ si ha che $(n,1) \in E$ quindi $\sup_E f \geq f(n,1) = n+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \sup_E f = +\infty$.

Notiamo inoltre che f è inferiormente limitata (in quanto $f \geq 0$ su E) e che se $(x_n, y_n) \in E$ è una successione di punti di E per cui $\|(x_n, y_n)\| \to +\infty$ allora necessariamente $x_n \to +\infty$ e quindi $f(x_n, y_n) \geq x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dunque f è una funzione coerciva su E che è un insieme chiuso e quindi deve avere un minimo.
Dato che $\nabla f = (1, 2y) \neq (0, 0)$ tale minimo non può essere raggiunto all'interno di E.
Cerchiamo dunque i punti di minimo per f su ∂E. $\partial E = E_1 \cup E_2$ dove $E_1 = \{(x, y) \mid y = 1, x \geq 1\}$ ed $E_2 = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0, x > 0 y < 1\}$ con $g(x, y) = x^2 y - 1$.
Se $x \geq 1$ $f|_{E_1}(x, y) = f(x, 1) = x + 1$ ha un minimo in $x = 1$ dunque $\min_{E_1} f = 2$.
I punti di minimo per f su E_2 sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda xy \\ 2y = \lambda x^2 \\ x^2 y = 1 \end{cases}$ Dall' ultima equazione ricaviamo che $x, y \neq 0$ quindi dalle prime due equazioni ricaviamo $\lambda = \frac{1}{2xy} = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow x = 4y^2$. Sostituendo nell'ultima equazione troviamo $16y^5 = 1 \Longrightarrow y = \frac{\sqrt[5]{2}}{2}$ e quindi $x = \sqrt[5]{4}$. L'unica soluzione in E del sistema è il punto $(\sqrt[5]{4}, \frac{\sqrt[5]{2}}{2})$. Dato che $f(\sqrt[5]{4}, \frac{\sqrt[5]{2}}{2}) = \sqrt[5]{4} + \frac{\sqrt[5]{4}}{4} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{4} < 2$ possiamo dire che $\min_E f = \dfrac{5}{4}\sqrt[5]{4}$.

6. $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z < 1\right\}$ $\quad f(x, y, z) = z^3 + xy$.



f è una fuzione continua su $\overline{E}$ che è un insieme compatto quindi $\sup_E f = \max_{\overline{E}} f$ e $\inf_E f = \min_{\overline{E}} f$. Studiamo quindi f su $\overline{E}$.
$\nabla f = (y, x, 3z^2) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$. L'origine non è però un punto dell' interno di $\overline{E}$ quindi non ci sono punti critici di f nell'interno di $\overline{E}$.
$\partial\overline{E} = E_1 \cup E_2 \cup \{(0, 0, 0)\}$ dove $E_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z^2, 0 < z < 1\}$ ed $E_2 = \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Se $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ i punti critici di f su E_1 sono soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 3z^2 = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$
Se $x = 0$ allora dalla prima equazione troviamo che $y = 0$ e dalla quarta che $z = 0$.
Se $x \neq 0$ allora anche $y \neq 0$ (dalla seconda equazione) quindi $2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = y^2$ cioè $x = y$ o $x = -y$. Se $x = y$ il sistema diventa $\begin{cases} 1 = 2\lambda \\ 3z^2 = -2\lambda z \\ 2x^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ 3z^2 + z = 0 \\ 2x^2 = z^2 \end{cases}$
dato che $x \neq 0$ non si può avere $z = 0$ quindi dalla seconda equaione troviamo $z = -\frac{1}{3}$ il che non è possibile in $\overline{E}$ quindi in questo caso il sistema non ha soluzione. Se $x = -y$ toviamo $\begin{cases} 1 = -2\lambda \\ 3z^2 = -2\lambda z \\ 2x^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 3z^2 - z = 0 \\ 2x^2 = z^2 \end{cases}$ dalla seconda equazione si ricava $z = \frac{1}{3}$ e dalla terza $x = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Le soluzioni del sistema sono dunque $(0, 0, 0)$ e $(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3})$.
Vediamo infine cosa succede su E_2. $f(x, y, 1) = 1 + xy$ quindi studiare f su E_2 è

equivalente a studiare la funzione $h(x,y) = 1 + xy$ nel disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$. $\nabla h = (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = 0$ quindi l'unico punto critico di h all'interno del disco è $(0,0)$.

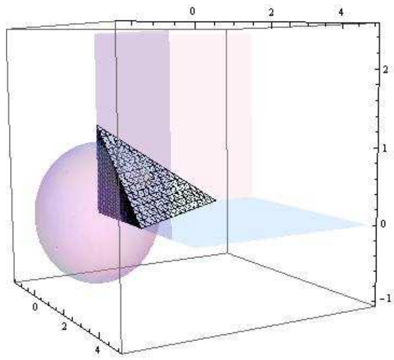
I punti critici di h sul bordo del disco sono soluzioni del sistema $\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Se $x = 0$ dalla prima equazione troviamo $y = 0$ il che non è possibile per l'ultima equazione. Analogamente non si può avere $y = 0$. Se $x, y \neq 0$ allora dalle prime due equazioni troviamo $x^2 = y^2$ quindi dall'ultima equazione $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

I punti critici di f su E_2 sono quindi $(0,0,1)$,$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. Riassumendo i possibili punti di massimo/minimo per f su $\overline{E}$ sono $(0,0,0)$, $(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3})$ $(0,0,1)$,$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

$f(0,0,0) = 0$, $f(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{54}$, $f(0,0,1) = 1$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \frac{3}{2}$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \frac{1}{2}$. Pertanto $\sup\limits_{E} f = \max\limits_{\overline{E}} = \dfrac{3}{2}$ e $\inf\limits_{E} f = \min\limits_{\overline{E}} f = -\dfrac{1}{54}$.

Notiamo infine che $\inf_E f$ è un minimo perché è assunto nel punto $(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}) \in E$ mentre $\sup_E f$ non è un massimo perchè è assunto solo nei punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ che non sono punti di E.

7. E è la porzione dell'ellissoide con semiassi di lunghezze a, b, c contenuta nell regione $z, y, z > 0$.



Consideriamo un punto $p = (x,y,z)$ dell'ellissoide E e cerchiamo l'equazione del piano tangente in p ad E. Consideriamo la funzione $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Si osserva che l'ellissoide considerato è la superfice di livello per $g(x,y,z) = 0$. Dato che il vettore $\nabla g(x,y,x)$ è il vettore ortogonale ad E in p, l'equazione del piano tangente ad E in p è $< \nabla g(x,y,z), (X - x, Y - y, Z - z) >= 0$ (nelle coordinate (X,Y,Z)) cioè

$$\frac{2x}{a^2}(X - x) + \frac{2y}{b^2}(Y - y) + \frac{2z}{c^2}(Z - z) = 0$$

che possiamo riscrivere come:

$$\frac{2x}{a^2}X + \frac{2y}{b^2}Y + \frac{2z}{c^2}Z - 2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = 1$$

Il piano così ottenuto intercetta gli assi coordinati nei punti $(\frac{a^2}{x}, 0, 0)$, $(0, \frac{b^2}{y}, 0)$ e $(0, 0, \frac{c^2}{z})$. Il tetraedro così ottenuto avrà volume $Vol(x,y,z) = \frac{a^2b^2c^2}{(6xyz)}$. Studiamo dunque la funzione $f(x,y,z) = \frac{a^2b^2c^2}{(6xyz)}$ sull'insieme E. Cerchiamo i punti di E in cui $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$;

$$\begin{cases} \frac{-a^2b^2c^2}{x^2yz} = \lambda\frac{2x}{a^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xy^2z} = \lambda\frac{2y}{b^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xyz^2} = \lambda\frac{2z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{-a^2b^2c^2}{xyz} = \lambda\frac{2x^2}{a^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xyz} = \lambda\frac{2y^2}{b^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xyz} = \lambda\frac{2z^2}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni otteniamo la relazione: $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ e dato che $x, y, z, a, b, c > 0$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Sostituendo nell'equazione del vincolo otteniamo

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

A queste coordinate corrisponde il volume del tetraedro $V = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$.
Questo è un punto di minimo essendo la funzione illimitata per $(x_n, y_n, z_n) \in E$ t.c. $x_n y_n z_n \to 0$

8. $F(x,y) = \left(\cos x \cos y + x \log\left(\frac{2}{\pi}y\right), e^{xy}\right)$.

   (a) F è una funzione di classe C^1 in un intorno del punto $(0, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right) & -\cos x \sin y + \frac{x}{y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice invertibile quinidi per il teorema della funzione inversa F è invertibile in un intorno di $(0, \frac{\pi}{2})$.

   (b) Sia $T = \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sappiamo che F è invertibile in un intorno di centro $(0, \frac{\pi}{2})$ e raggio ρ dove $\sup\limits_{B_\rho(0,\frac{\pi}{2})} \left\| Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} \right\| \leq \frac{1}{2}$ e che $g = F^{-1}$ è definita in un intorno di centro $F(0\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ e raggio $r \leq \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} = \frac{\rho}{4}$.
   $Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right) & -\cos x \sin y + \frac{x}{y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{\pi}ye^{xy} & -\frac{2}{\pi}xe^{xy} \\ -\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right) & 1 - \cos x \sin y + \frac{x}{y} \end{pmatrix}$
   Supponendo che $\rho \leq \frac{1}{3}$ abbiamo
   $|1 - \frac{2}{\pi}ye^{xy}| \leq |1 - \frac{2}{\pi}y| + |\frac{2}{\pi}y - \frac{2}{\pi}ye^{xy}| = \frac{2}{\pi}|y - \frac{\pi}{2}| + \frac{2}{\pi}|y||1 - e^{xy}| \leq |y - \frac{\pi}{2}| + |y||1 - e^{xy}| \leq \rho + 2|1 - e^{xy}| \leq \rho + 6|xy| \leq \rho + 12\rho = 13\rho$
   $|-\frac{2}{\pi}xe^{xy}| \leq |x|e^{xy} \leq 3\rho$
   $|-\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right)| \leq |\sin x||\cos x| + |\log\left(\frac{2}{\pi}y\right)| \leq |x| + |\log\left(1 + \frac{2}{\pi}y - 1\right)| \leq \rho + |\log\left(1 + \frac{2}{\pi}(y - \frac{\pi}{2})\right)| \leq \rho + \frac{4}{\pi}|y - \frac{\pi}{2}| \leq \rho + \frac{4}{\pi}\rho \leq 3\rho$
   $|1 - \cos x \sin y + \frac{x}{y}| \leq |1 - \cos x \sin y| + \frac{|x|}{|y|} \leq |1 - \cos x| + |\cos x - \cos x \sin y| + \frac{|x|}{|y|} \leq \frac{x^2}{2} + |\cos x||1 - \sin y| + 2|x| \leq \frac{\rho^2}{2} + |1 - \sin y| + 2\rho \leq \frac{5}{2}\rho + |1 - \sin(y - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})| \leq \frac{5}{2}\rho + |1 - \cos(y - \frac{\pi}{2})| \leq \frac{5}{2}\rho + \frac{|y - \frac{\pi}{2}|^2}{2} \leq \frac{5}{2}\rho + \frac{\rho^2}{2} \leq 3\rho$.
   Dunque $\sup\limits_{B_\rho(0,\frac{\pi}{2})} \left\| Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} \right\| \leq 2 \sup\limits_{B_\rho(0,\frac{\pi}{2})} \left\| Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} \right\|_\infty \leq 26\rho \leq \frac{1}{2}$ se $\rho \leq \frac{1}{52}$.

   (c) Sappiamo che $\frac{\partial g}{\partial(u,v)}(0,1) = \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ quindi lo sviluppo di Taylor di g attorno al punto $(0,1)$ è
   $g(u,v) = \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ g_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi}(v-1) + o(\sqrt{u^2 + (v-1)^2}) \\ \frac{\pi}{2} - u + +o(\sqrt{u^2 + (v-1)^2}) \end{pmatrix}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

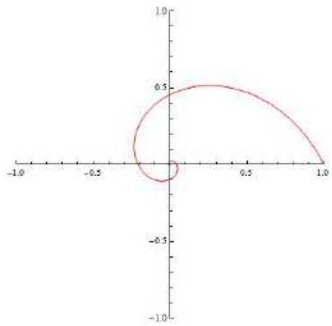
Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 6 (31 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati, curve

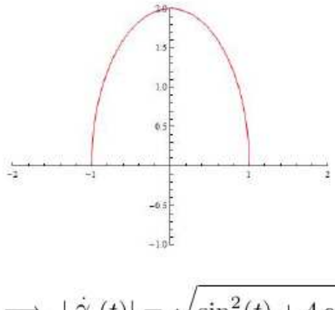
1. $\gamma(t) = \left(e^{-3t}\cos(4t), e^{-3t}\sin(4t)\right)$ $t \in [0, +\infty)$.



$\dot{\gamma}(t) = \left(-3e^{-3t}\cos(4t) - 4e^{-3t}\sin(4t), -3e^{-3t}\sin(4t) + 4e^{-3t}\cos(4t)\right)$
$|\dot{\gamma}(t)|^2 = 9e^{-6t}\cos^2(4t) + 16e^{-6t}\sin^2(4t) + 24e^{-6t}\cos(4t)\sin(4t) + 9e^{-6t}\sin^2(4t) +$
$+16e^{-6t}\cos^2(4t) - 24e^{-6t}\cos(4t)\sin(4t) = 9e^{-6t} + 16e^{-6t} = 25e^{-6t}$.
$|\dot{\gamma}(t)| = 5e^{-3t} \neq 0 \ \forall\, t$ quindi γ è una curva regolare.
Per definizione la lunghezza di γ è data da

$$\ell(\gamma) = \int_0^\infty |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^\infty 5e^{-3t}\, dt = -\frac{5}{3}\, e^{-3t}\Big|_0^\infty = \frac{5}{3}$$

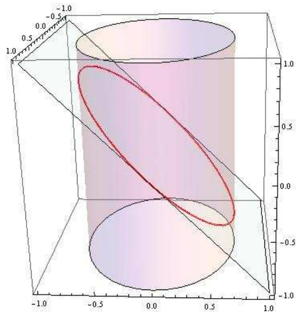
2. $\gamma(t) = (\cos(t), 2\sin(t))$ $t \in [0, \pi]$.



$\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), 2\cos(t)) \implies |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{1 + 3\cos^2(t)} \neq 0 \ \ \forall\ \ t$
quindi γ è una curva regolare.
Se $f(x, y) = \sqrt{1 + 3x^2}$ allora per definizione abbiamo che

$$\int_\gamma f(x, y)d\ell = \int_0^\pi f(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^\pi \sqrt{1 + 3\cos^2(t)}\, |\dot{\gamma}(t)| = \int_0^\pi (1 + 3\cos^2(t))\, dt =$$
$$= \pi + 3\int_0^\pi \cos^2(t)\, dt = \pi + 3\int_0^\pi \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \pi + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^\pi + \pi\right) = \pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi.$$

3. Sia γ la curva ottenuta intersecando il cilindro con base ellittica $x^2 + 2y^2 = 1$ e il piano $y + z = 0$.



Una parametrizzazione di γ è $\gamma(t) = \left(\cos(t), \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\right)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

(a) $\dot{\gamma}(t) = \left(-\sin(t), \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t)} = 1.$

Dunque γ è una curva regolare e $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$

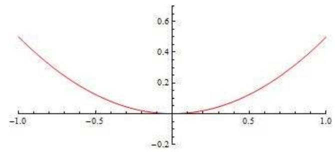
(b) $$\int_\gamma xyz + \frac{|y|}{2x^2 + y^2 + 2z^2}\, d\ell = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\cos(t)\sin^2(t) + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|\sin(t)|}{2\cos^2(t) + \frac{1}{2}\sin^2(t) + \sin^2(t)} dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{|\sqrt{2}\sin(t)|}{4\cos^2(t) + 3\sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{|\sqrt{2}\sin(t)|}{3 + \cos^2(t)} dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{3 + \cos^2(t)} dt$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1 + \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dt \;=\; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+s^2}\, ds \;=\; \frac{2}{3}\sqrt{6}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+s^2}\, ds \;=$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{6}\arctan s\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{6}\,\pi$$

4. Una parametrizzazione dell'arco di parabola in questione è $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$ $t \in [-1, 1]$.



$\dot{\gamma}(t) = (1, t) \Longrightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + t^2}$ quindi

$$\ell(\gamma) = \int_{-1}^{1} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = 2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^{\text{arcsinh}1} \sqrt{1 + \sinh^2(t)}\, \cosh(t) dt$$

$$= \int_0^{\text{arcsinh}1} \cosh^2(t) dt = 2\int_0^{\text{arcsinh}1} \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} dt = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4} + t\,\Big|_0^{\text{arcsinh}1} =$$

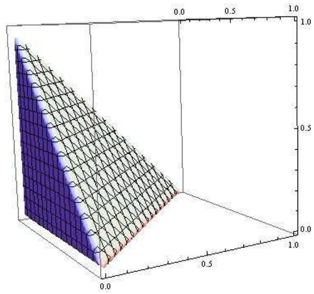
$$= \frac{1}{4}e^{2\text{arcsinh}1} - \frac{1}{4}e^{-2\text{arcsinh}1} + \text{arcsinh}1.$$

A questo punto ricordiamo che $t = \sinh s \Rightarrow e^s - e^{-s} = 2t \Rightarrow e^{2s} - 1 = 2te^s \Rightarrow e^{2s} - 2te^s - 1 = 0 \Rightarrow e^s = t + \sqrt{1+t^2} \Rightarrow s = \log(t + \sqrt{1+t^2})$ quindi $\text{arcsinh}\, t = \log(t + \sqrt{1+t^2})$. In particolare $\text{arcsinh}1 = \log(1 + \sqrt{2})$ dunque

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{4}e^{2\log(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{4}e^{-2\log(1+\sqrt{2})} + \log(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{4} - \frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2} + \log(1+\sqrt{2})$$

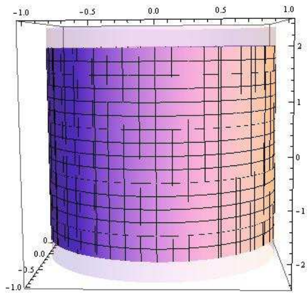
$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4(3+2\sqrt{2})} + \log(1+\sqrt{2}) = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \log(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})$$

5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$ $\quad f(x,y,z) = xy^2z^3$.
E è il tetraedro in $\mathbb{R}^3$ di vertici $(0,0,0)$,$(1,0,0)$,$(0,1,0)$,$(0,0,1)$.



I possibili punti di massimo/minimo di f su E o sono interni ad E e quindi punti in cui $\nabla f = 0$ oppure si trovano su ∂E. $\nabla f(x,y) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ si annulla solo in punti di ∂E quindi non ci sono punti critici interni ad E. Cerchiamo ora i massimi e i minimi su ∂E. ∂E è l'unione delle quattro facce del tetraedro. Su tre delle quatto facce f è identicamente nulla pertanto dobbiamo studiare f solo sulla faccia $\{x+y+z = 1, x, y, z > 0\}$. I punti critici di f su questa faccia sono soluzioni di $\begin{cases} y^2z^3 = \lambda \\ 2xyz^3 = \lambda \\ 3xy^2z^2 = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases}$.
Dalle prime due equazioni si ottiene che $y^2z^3 = 2xyz^3 \Rightarrow yz^3(y-2x) = 0$. Dato che $x, y, z > 0$ abbiamo $y = 2x$. In modo analogo dalla seconda e dalla terza equazione si trova $xyz^2(2z-3y) = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{2}y = 3x$. Sostituendo le due relazioni trovate nell'ultima equazione troviamo che $x + 2x + 3x = 1$ cioè $6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}$ e $z = \frac{1}{2}$. L'unica soluzione del sistema è il punto $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Dato che $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{432}$ e che f è nulla sulle altre tre facce abbiamo $\max_E f = \frac{1}{432}$ e $\min_E f = 0$.

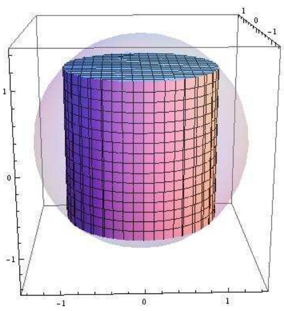
6. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad f(x,y,z) = \dfrac{y^2+1}{1+x^2+z^2}$.



Per prima cosa notiamo che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $(0,0,n) \in E$ e $f(0,0,n) = \dfrac{1}{1+n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dato che $f(x,y,z) > 0$ ne concludiamo che $\inf_E f = 0$ e che questo inf non è un minimo.
Inoltre notiamo che se $(x_n, y_n, z_n) \in E$ e $\|(x_n, y_n, z_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ allora $|z_n| \to \infty$ e $|x_n|, |y_n| \leq 1$ quindi $0 < f(x,y_n, z_n) \leq \dfrac{2}{z_n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Questo ci permette di dire che f ha un massimo in E. Cerchiamo dunque il massimo di f su E.

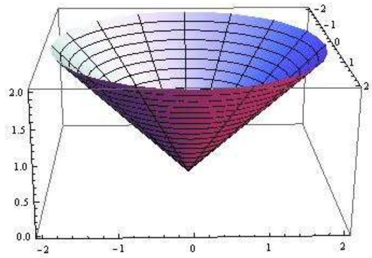
$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2}, \frac{2y}{1+x^2+z^2}, -\frac{2z(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2}\right) = (0,0,0) \iff (x,y,z)$$
$= (0,0,0)$ quindi $(0,0,0)$ è l'unico punto critico di f interno ad E.
Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti critici vincolati di f su ∂E sono soluzioni del sistema
$$\begin{cases} -\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2} = 2\lambda x \\ \frac{2y}{1+x^2+z^2} = 2\lambda y \\ -\frac{2z(1+y^2)}{(1+x^2+z^2)^2} = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2)^2} = 2\lambda x \\ \frac{2y}{1+x^2} = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$
Dalla terza equazione ricaviamo che $y = 0$ oppure $\lambda = \frac{1}{1+x^2}$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$. Se invece $\lambda = \frac{1}{1+x^2}$ allora sostituendo nella seconda equazione troviamo $-\frac{2x(1+y^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \Longrightarrow -\frac{x(1+y^2)}{1+x^2} = x \Longrightarrow -x(1+y^2) = x(1+x^2) \Longrightarrow x(x^2+y^2+2) = 0 \Longrightarrow 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ e $y = \pm 1$. Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(\pm 1, 0, 0)$ e $(0, \pm 1, 0)$.
$f(\pm 1, 0, 0) = \frac{1}{2}$, $f(0, \pm 1, 0) = 2$ e $f(0,0,0) = 1$ quindi $\sup_E f = \max_E f = 2$ ed è assunto nei punti $(0, \pm 1, 0)$.

7. A meno di rotazioni possiamo supporre che il cilindro abbia asse di simmetria parallelo all' asse z.



Dato che il cilindro è inscritto nella sfera unitaria se chiamiamo x il raggio e y l'altezza del cilindro abbiamo che $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$. Il volume del cilindro è $\pi x^2 y$. Dobbiamo quindi massimizzare la funzione $f(x,y) = \pi x^2 y$ nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ (si noti che l'insieme è compatto e che f è continua quindi esiste sicuramente almeno un punto di massimo). Se $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$ per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo per f su E si ottengono come soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$
cioè $\begin{cases} 2\pi xy = 2\lambda x \\ \pi x^2 = \lambda \frac{y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$
Dalla prima equazione ricaviamo che $2x(\pi y - \lambda) = 0$ da cui $x = 0$ o $\lambda = \pi y$. Se $x = 0$ allora $y = \pm 2$ mentre se $\lambda = \pi y$ nella seconda equazione otteniamo $2x^2 = y^2$ quindi sostituendo nel vincolo $x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(0, \pm 2), (\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}), (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})$. Dato che il raggio e l'altezza non possono essere negativi gli unici punti che ci interessano sono $(0,2)$ e $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$. $f(0,2) = 0$ e $f(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$ quindi il cilindro di volume massimo è quello di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}$ e altezza $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

8. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0\} \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^4 - z.$



Notiamo $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $(n,0,n) \in E$ è una successione di punti di E tali che $f(n,0,n) = n^2 - n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ quindi $\sup_E f = +\infty$. Inoltre in E $f(x,y,z) = z^2 - y^2 + y^4 - z = z^2 - z + y^2(y^2-1) \geq z^2 - z - 1$ quindi se $(x_n, y_n.z_n) \in E$ è tale che $\|(x_n,y_n,z_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ allora $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e quindi $f(x_n,y_n,z_n) \geq z_n^2 - z_n + 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dunque f è una funzione coerciva in E e dunque ha un minimo in E. Se $g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti di minimo di f su E diversi da $(0,0,0)$ (punto in cui $\nabla g = 0$) sono tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ -1 = -2\lambda z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(2y^2-\lambda) = 0 \\ -1 = -2\lambda z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $x = 0$ o $\lambda = 1$.

Se $x = 0$ allora il sistema diventa $\begin{cases} 2y(2y^2-\lambda) \\ -1 = -2\lambda z \\ y^2 = z^2 \end{cases}$ dalle ultime due equazioni ricaviamo che $y = \pm z \neq 0$ quindi dalla prima che $\lambda = 2y^2 = \lambda$. La seconda equazione diventa quindi $1 = 4y^2 z \Longrightarrow z = \frac{1}{4y^2}$. L'ultima equazione dice quindi che $y^2 = \frac{1}{16y^4} \Longrightarrow y^6 = \frac{1}{16} \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ e $z = \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Se $\lambda = 1$ allora abbiamo $\begin{cases} 2y(2y^2-1) = 0 \\ 1 = 2z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(2y^2-1) = 0 \\ z = \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ Dalla prima equazione troviamo $y = 0$ o $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nel primo caso dall'ultima equazione abbiamo $x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ mentre nel secondo caso $x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4}$ il che non è possibile.

I possibili punti di minimo per f su E sono quindi $(\pm\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(0, \pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ e $(0,0,0)$.
$f(\pm\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(0,\pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ e $f(0,0,0) = 0$ dunque $\inf_E f = \min_E f = -\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ ed è assunto nei punti $(0, \pm\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$.

9. Siano $f(x,y) = \|(x,y)\|_4^4 = x^4 + y^4$ e $g(x,y) = \|(x,y)\|_2^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1$. Notiamo che $\max\limits_{\|(x,y)\|_2 = 1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\max\limits_{\{g=0\}} f}$ e $\min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\min\limits_{\{g=0\}} f}$. Calcoliamo dunque $\max\limits_{\{g=0\}} f$ e $\min\limits_{\{g=0\}} f$. Per il principio dei molitiplicatori di Lagrange i punti di massimo /minimo per f su $\{g = 0\}$ sono soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$ cioè

$$\begin{cases} 4x^3 = 2\lambda x \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(2x^2-\lambda) = 0 \\ y(2y^2-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $x = 0$ allora $y = \pm 1$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$. Se $x, y \neq 0$ allora $\lambda = 2x^2 = 2y^2$ cioè $x^2 = y^2$ quindi sostituendo nell'ultima equazione troviamo $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$ dunque $\max\limits_{\{g=0\}} f = 1$ e $\min\limits_{\{g=0\}} f = \dfrac{1}{2}$ da cui si ricava che $\max\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\max\limits_{\{g=0\}} f} = 1$ e $\min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \sqrt[4]{\min\limits_{\{g=0\}} f} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
Cerchiamo ora le costanti ottimali α, β tali che $\alpha\|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_4 \le \beta\|(x,y)\|_2$.
Notiamo che $\alpha\|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_4 \ \forall\ (x,y) \Longrightarrow \alpha \le \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4$. D'altra parte $\forall\ (x,y) \neq (0,0)\ \|\dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|_2}\|_4 \ge \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 \Rightarrow \|(x,y)\|_2 \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 \le \|(x,y)\|_4$ quindi siccome α è la costante ottimale si deve avere $\alpha \ge \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4$. Dunque $\alpha = \min\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. In modo analogo $\beta = \max\limits_{\|(x,y)\|_2=1} \|(x,y)\|_4 = 1$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 7 (7 Aprile 2010)
Ripasso

1. $x_n(k) = \dfrac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}$.

   (a) $\|x_n\|_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=0}^{+\infty}\cos^k\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ e $\|x_n\|_2 =$
   $= \displaystyle\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{\cos^k\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\right|^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{1-\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_2 1 \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}2 = +\infty$, quindi x_n non converge in ℓ_1, mentre $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} =$
   $= \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}}\sqrt{\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} =$
   $= 0$, quindi x_n converge a 0 in ℓ_2.

2. $\Phi(x)(k) = e^{-k-1}x^2(k)$.

   (a) Φ non è una contrazione in ℓ_∞ perché ha più di un punto fisso: infatti, $\Phi(x) = x \iff x(k) = e^{-k-1}x^2(k) \iff x(k)\left(1-e^{-k-1}x(k)\right) =$
   $= 0 \iff x(k) = 0$ oppure $x(k) = e^{k+1}$, dunque tutte le successioni del tipo $x(k) = \begin{cases} e^{k+1} & \text{per un numero finito di } k \\ 0 & \text{per gli altri } k \end{cases}$ sono punti fissi; è essenziale che $x(k) = e^{-k-1}$ solo per finiti valori di k, perché altrimenti $x \notin l_\infty$.

   (b) Φ è una contrazione sulla palla unitaria $X = \{x \in \ell_\infty : \|x\|_\infty \le 1\}$ perché $\forall x \in X$ si ha $\displaystyle\|\Phi(x)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}x^2(k)\right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}\right|\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|^2 \le$
   $\le e^{-1}\displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|^2 \le \frac{1}{e} \le 1$ e dunque $\Phi(X) \subset X$, e inoltre $\forall x, y \in X$ si ha $\displaystyle\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}\left(x^2(k)-y^2(k)\right)\right| \le$
   $\le \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{-k-1}\right|\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)-y(k)|\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)+y(k)| \le$
   $\le e^{-1}\displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)-y(k)|\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|+\sup_{k\in\mathbb{N}}|y(k)|\right) \le \frac{2}{e}\sup_{k\in\mathbb{N}}|x(k)-y(k)| =$
   $= \dfrac{2}{e}\|x-y\|_\infty$.

3. $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\sqrt{1+x_1} - \dfrac{1}{1+x_2} - e^{-y_1} + \cos y_2, \log(\cosh x_1) - \dfrac{\sin(x_1x_2)}{1+y_1^2} + \arctan y_2\right)$.

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine, inoltre $F(0,0,0,0)=(0,0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0)=\left.\begin{pmatrix} e^{-y_1} & -\sin y_2 \\ \frac{2y_1\sin(x_1x_2)}{\left(1+y_1^2\right)^2} & \frac{1}{1+y_2^2}\end{pmatrix}\right|_{(x_1,x_2,y_1,y_2)=(0,0,0,0)}=$
$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ è invertibile (con $T=\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists\, r,\rho>0$ e $g\in$ $\in C^1(B_r((0,0)),B_\rho((0,0)))$ tale che $F(x_1,x_2,g_1(x),g_2(x))\equiv 0\;\forall x\in B_r((0,0))$.

(b) Supponendo $r\le\dfrac{1}{2}$ e $\rho\le 1$ si ha che $\|F(x_1,x_2,0,0)\|=$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}\right)^2+(\log(\cosh x_1)-\sin(x_1x_2))^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{1+x_1}-1+1-\frac{1}{1+x_2}\right)^2+(\log(1+(\cosh(x_1)-1))-\sin(x_1x_2))^2}\le$$

$$\le\sqrt{\left(\left|\sqrt{1+x_1}-1\right|+\left|1-\frac{1}{1+x_2}\right|\right)^2+(|\log(1+(\cosh(x_1)-1))|+|\sin(x_1x_2)|)^2}$$

$$\le\sqrt{\left(\left|\frac{\left(\sqrt{1+x_1}-1\right)\left(\sqrt{1+x_1}+1\right)}{\sqrt{1+x_1}+1}\right|+\left|\frac{x_2}{1+x_2}\right|\right)^2+(2|\cosh(x_1)-1|+|x_1x_2|)^2}\le$$

$$\le\sqrt{\left(\frac{|x_1|}{\sqrt{1+x_1}+1}+\frac{|x_2|}{1-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(2\frac{|e^{x_1}+e^{-x_1}-2|}{2}+\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)^2}\le$$

$$\le\sqrt{(|x_1|+2|x_2|)^2+\left(|e^{x_1}-1|+|e^{-x_1}-1|+\frac{r^2}{2}\right)^2}\le\sqrt{(3r)^2+\left(6|x_1|+\frac{r}{2}\right)^2}\le$$

$$\le\sqrt{9r^2+\left(6r+\frac{r}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{4}r^2+\frac{169}{4}r^2}=\frac{\sqrt{205}}{2}r\le\frac{15}{2}r,$$ dunque per avere $\displaystyle\sup_{x\in B_r(0,0)}\|F(x_1,x_2,0,0)\|\le\frac{15}{2}r\le\frac{\rho}{4}=\frac{\rho}{4\|T\|_\infty}\le\frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente prendere $\rho=\dfrac{r}{30}$; inoltre, $\mathbb{I}_2-T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)=$
$=\begin{pmatrix} 1-e^{-y_1} & \sin y_2 \\ -\frac{2y_1\sin(x_1x_2)}{\left(1+y_1^2\right)^2} & 1-\frac{1}{1+y_2^2}\end{pmatrix}$, dunque essendo $\left|1-e^{-y_1}\right|\le 3|y_1|\le$ $\le 3\rho$, $|\sin(y_2)|\le|y_2|\le\rho$, $\left|-\dfrac{2y_1\sin(x_1x_2)}{(1+y_1^2)^2}\right|\le 2|y_1||\sin(x_1x_2)|\le$ $\le 2\rho|x_1x_2|\le 2\rho\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}\le\rho r^2\le\rho r\le\dfrac{\rho^2}{30}\le\dfrac{\rho}{30}$ e $\left|1-\dfrac{1}{1+y_2^2}\right|=$ $=\dfrac{y_2^2}{1+y_2^2}\le y_2^2\le\rho^2\le\rho$, allora per avere

$$\sup_{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in B_r((0,0))\times B_\rho((0,0))}\left\|\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right\|\le$$
$$\le 2\sup_{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in B_r((0,0))\times B_\rho((0,0))}\left\|\mathbb{I}_2-T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right\|_\infty\le 6\rho\le$$
$\le\dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho=\dfrac{1}{12}$, e di conseguenza $r=\dfrac{\rho}{30}=\dfrac{1}{360}$.

(c) Essendo $\sqrt{1+x_1} - \dfrac{1}{1+x_2} - e^{-g_1(x_1,x_2)} + \cos(g_2(x_1,x_2)) \equiv 0\ \forall x \in B_r((0,0))$, allora $0 = \dfrac{d}{dx_1}\left(\sqrt{1+x_1} - \dfrac{1}{1+x_2} - e^{-g_1(x_1,x_2)} + \cos(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x_1}} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)e^{-g_1(x_1,x_2)} - \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\sin(g_1(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) = -\dfrac{1}{2}$ e $0 = \dfrac{d}{dx_2}\left(\sqrt{1+x_1} - \dfrac{1}{1+x_2} - \right.$ $\left.-e^{-g_1(x_1,x_2)} + \cos(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left(\dfrac{1}{(1+x_2)^2} + \right.$ $\left. + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)e^{-g_1(x_1,x_2)} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\sin(g_1(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$

$= 1 + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) = -1$, analogamente $\log(\cosh x_1) - $ $- \dfrac{\sin(x_1x_2)}{1+g_1^2(x_1,x_2)} + \arctan(g_2(x_1,x_2)) \equiv 0\ \forall x \in B_r((0,0))$, dunque $0 =$

$$= \frac{d}{dx_1}\left(\log(\cosh x_1) - \frac{\sin(x_1x_2)}{1+g_1^2(x_1,x_2)} + \arctan(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \left(\tanh x_1 - \frac{-2g_1(x_1,x_2)\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)\sin(x_1x_2) + \left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)(x_2\cos(x_1x_2))}{\left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{1+g_2^2(x_1,x_2)}\right)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0) = 0 \text{ e } 0 =$$

$$= \frac{d}{dx_2}\left(\log(\cosh x_1) - \frac{\sin(x_1x_2)}{1+g_1^2(x_1,x_2)} + \arctan(g_2(x_1,x_2))\right)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \left(-\frac{-2g_1(x_1,x_2)\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)\sin(x_1x_2) + \left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)(x_1\cos(x_1x_2))}{\left(1+g_1^2(x_1,x_2)\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{1+g_2^2(x_1,x_2)}\right)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) = 0;\ \text{quindi,}$$

$g_1(x_1,x_2) = g_1(0,0) + \left\langle \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0), \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(0,0)\right), (x_1,x_2)\right\rangle +$ $+ o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) = -\dfrac{x_1}{2} - x_2 + o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$ e $g_2(x_1,x_2) = g_2(0,0) +$ $+ \left\langle \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0), \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0)\right), (x_1,x_2)\right\rangle + o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) = o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$

4. $F(x,y) = \left(\sin(xy) + x\cos y, e^{x+y} - \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\right)$.

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = (0,0)$, inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) + \cos y & x\cos(xy) - x\sin y \\ e^{x+y} - \frac{2x}{(1+x_2+y_2)^2} & e^{x+y} - \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)} =$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T = \left(\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione inversa $\exists\ r, \rho > 0$ e $g \in$ $\in C^1(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)\ \forall (u,v) \in$

$B_r((0,0))$.

(b) Supponendo $\rho \leq 1$, si ha che $\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y) =$
$= \begin{pmatrix} 1 - y\cos(xy) - \cos y & x\sin(y) - x\cos(xy) \\ y\cos(xy) + \cos(y) - e^{x+y} + \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} & 1 + x\cos(xy) - x\sin(y) - e^{x+y} + \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$,
dunque essendo $|1 - y\cos(xy) - \cos y| \leq |y||\cos(xy)| + |1 - \cos y| \leq |y| +$
$+\dfrac{y^2}{2} \leq \rho + \dfrac{\rho^2}{2} \leq \dfrac{3}{2}\rho$, $|x\sin(y) - x\cos(xy)| \leq |x||\sin(y)| + |x||\cos(xy)| \leq$
$\leq 2|x| \leq 2\rho$, $\left|y\cos(xy) + \cos(y) - e^{x+y} + \dfrac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}\right| \leq |y||\cos(xy)| +$
$+|\cos(y) - 1| + \left|1 - e^{x+y}\right| + \dfrac{2|x|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq |y| + \dfrac{y^2}{2} + 3(|x| + |y|) +$
$+2|x| \leq \rho + \dfrac{\rho^2}{2} + 6\rho + 2\rho \leq \dfrac{19}{2}\rho$ e $\left|1 + x\cos(xy) - x\sin(y) - e^{x+y} +\right.$
$\left.+\dfrac{2y}{(1+x^2+y^2)^2}\right| \leq |x||\cos(xy)| + |x||\sin(y)| + \left|1 - e^{x+y}\right| + \dfrac{2|y|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq$
$\leq 2|x| + 3(|x| + |y|) + 2|y| \leq 2\rho + 6\rho + 2\rho = 10\rho$, allora per avere
$\sup\limits_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y)\right\| \leq 2 \sup\limits_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y)\right\|_\infty \leq$
$\leq 20\rho \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{40}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{160} =$
$= \dfrac{\rho}{4} = \dfrac{\rho}{4\|T\|} \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|}$.

(c) Essendo $F(g(u,v)) = (u,v)\ \forall (u,v) \in B_r((0,0))$, allora
$\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(g(u,v))\dfrac{\partial g}{\partial(u,v)}(u,v) = \dfrac{\partial}{\partial(u,v)}F(g(u,v)) = \dfrac{\partial}{\partial(u,v)}(u,v) =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ \forall (u,v) \in B_r((0,0)) \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial(u,v)}(0,0) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dunque $g_1(u,v) = g_1(0,0) + \left\langle \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial u}(0,0), \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(0,0)\right), (u,v) \right\rangle +$
$+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = u + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$ e $g_2(u,v) = g_2(0,0) +$
$+\left\langle \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial u}(0,0), \dfrac{\partial g_2}{\partial v}(0,0)\right), (u,v) \right\rangle + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = v - u +$
$+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$.

5. $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z > 0\right\}$ e $f(x,y,z) = x^2y^2 + \log z$.

(a) f è superiormente limitata su E perché se $(x,y,z) \in E$ allora $x,y,z \leq 1$, dunque $f(x,y,z) \leq 1^2 1^2 + \log 1 = 1$, ma non è inferiormente limitata su E perché $\left(0,0,\dfrac{1}{n}\right) \in E$ e $f\left(0,0,\dfrac{1}{n}\right) = \log\left(\dfrac{1}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\to} -\infty$

(b) Essendo f inferiormente illimitata su E, $\inf\limits_E f = -\infty$; per calcolare $\sup\limits_E f$, notiamo che se $E \ni (x_n, y_n, z_n) \overset{n\to+\infty}{\to} E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = 0\right\}$, $f(x_n,y_n,z_n) \overset{n\to+\infty}{\to} -\infty$, dunque l'estremo superiore non sarà raggiunto sul bordo inferiore E_1 di E e perciò sarà un massimo; inoltre, $\nabla f(x,y,z) = \left(2xy^2, 2x^2y, \frac{1}{z}\right) \neq (0,0,0)\ \forall (x,y,z) \in E$, quindi questo massimo non sarà raggiunto all'interno di E e dunque verrà necessariamente realizzato sul suo bordo superiore $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0\}$: per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, le coordinate dei punti in cui viene raggiunto il massimo sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 2xy^2 = 2\lambda x \\ 2x^2y = 2\lambda y \\ \frac{1}{z} = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} 2x\left(y^2-\lambda\right) = 0 \\ 2y\left(x^2-\lambda\right) = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2z^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\left(y^2-\frac{1}{2z^2}\right) = 0 \\ y\left(x^2-\frac{1}{2z^2}\right) = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2z^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases}$; se fosse $y^2 = \frac{1}{2z^2}$, allora avrei $x^2 = \frac{1}{2z^2}$, perché $y \neq 0$, dunque $1 = x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^2} + z^2 = \frac{z^4+1}{z^2} \iff 0 = z^4 - z^2 + 1 = \left(z^2-1\right)^2 + z^2$, che è assurdo, dunque dev'essere $x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{y}{2z^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 1$, quindi $\sup_E f = \max_E f = f(0,0,1) = 0$

6. $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$ per $t \in [0,\pi]$

   (a) $\|\dot\gamma(t)\| = \left\|\left(3\sin t\cos^2 t, 3\sin^2 t\cos t\right)\right\| = 3|\sin t||\cos t|\|(\cos t, \sin t)\| = 3|\sin t||\cos t|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3|\sin t||\cos t| = 0$ se $t = \frac{\pi}{2}$, dunque γ non è regolare; tuttavia, è regolare a tratti perché $\|\dot\gamma(t)\| \neq 0\ \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

   (b) $l(\gamma) = \int_0^\pi \|\dot\gamma(t)\| dt = \int_0^\pi 3|\sin t||\cos t| dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t + 3\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\sin t\cos t = 3\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\left[-\frac{\sin^2 t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$

   (c) $\int_\gamma \sqrt[3]{|xy|} d\ell = \int_0^\pi \sqrt[3]{|x(t)y(t)|}\|\dot\gamma(t)\| dt = \int_0^\pi |\cos t\sin t| 3|\sin t||\cos t| = 3\int_0^\pi \frac{(2\cos t\sin t)^2}{4} dt = 3\int_0^\pi \frac{\sin^2(2t)}{4} dt = \int_0^\pi \frac{1-\cos(4t)}{8} dt = 3\left[\frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32}\right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi.$

7. $x_n(k) = \dfrac{1 + \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2}$

   Ponendo $x(k) = \frac{1}{k^2}$, si ha che $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} x$ in ℓ_2, perché $\|x_n - x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2}\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{\frac{k}{n^2}}{k^2}\right|^2 = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$; inoltre, $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} x$

anche in ℓ_1 perché $\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} +$
$+ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\left|\arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{k^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq$
$\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0.$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

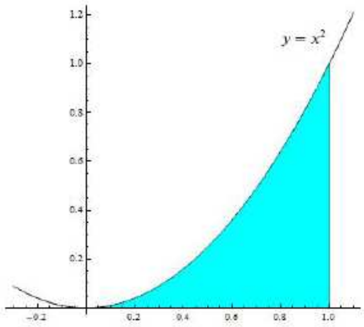
A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 8 (5 Maggio 2010)

Integrali

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}$.

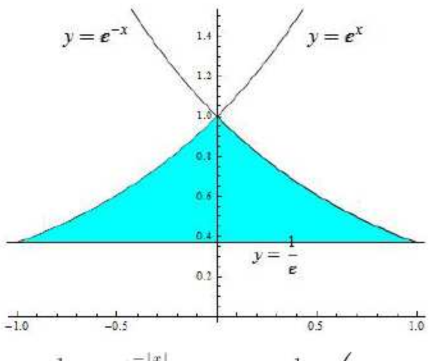


Dato che A è un insieme normale applicando il teorema di Fubini si ottiene che

$$\int_A xye^{x^6}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\ \ xye^{x^6} = \int_0^1 dx\ \ \frac{1}{2}y^2xe^{x^6}\Big|_0^{x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\ x^5e^{x^6} \overset{(t=x^6)}{=}$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{12}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(e-1)$$

2. $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{e} \leq y \leq e^{-|x|}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq x \leq 1,\ \frac{1}{e} \leq y \leq e^{-|x|}\right\}$.



$$\int_B \log y\ dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{\frac{1}{e}}^{e^{-|x|}} dy\ \ \log y = \int_{-1}^1 dx \left(y\log y\Big|_{\frac{1}{e}}^{e^{-|x|}} - \int_{\frac{1}{e}}^{e^{-|x|}} dy\ 1\right) =$$

$$= \int_{-1}^1 dx - |x|e^{-|x|} + \frac{1}{e} - e^{-|x|} + \frac{1}{e} = \int_{-1}^1 dx\ \frac{2}{e} - |x|e^{-|x|} - e^{-|x|}dx =$$

$$= 2\int_0^1 dx\ \frac{2}{e} - xe^{-x} - e^{-x}dx = \frac{4}{e} - 2\int_0^1 xe^{-x}dx - 2\int_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= \frac{4}{e} - 2\left(-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx\right) - 2\int_0^1 e^{-x}dx = \frac{4}{e} + \frac{2}{e} - 4\int_0^1 e^{-x}dx =$$

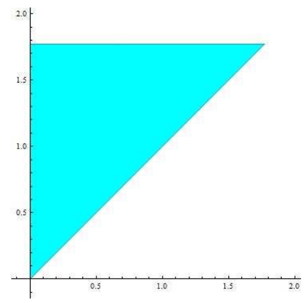
$$= \frac{6}{e} + 4e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{10}{e} - 4$$

L'integrale si poteva calcolare anche integrando prima in x e poi in y:
$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{e} \le y \le 1,\ \log y \le x \le -\log y\right\}$

$$\int_B \log y dxdy = \int_{\frac{1}{e}}^1 dy \int_{\log y}^{-\log y} dx \log y = -2\int_{\frac{1}{e}}^1 \log^2 y\, dy = -2\left(y\log^2 y\Big|_{\frac{1}{e}}^1 - 2\int_{\frac{1}{e}}^1 \log y\right) =$$

$$= \frac{2}{e} + 4\int_{\frac{1}{e}}^1 \log y\, dy = \frac{2}{e} + 4\left(y\log y - y\Big|_{\frac{1}{e}}^1\right) = \frac{2}{e} - 4 + \frac{4}{e} + \frac{4}{e} = \frac{10}{e} - 4$$

3. $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{\pi}, x \le y \le \sqrt{\pi}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y, 0 \le y \le \sqrt{\pi}\right\}$

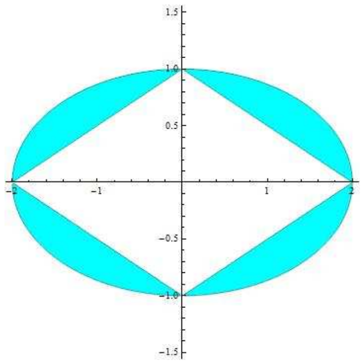


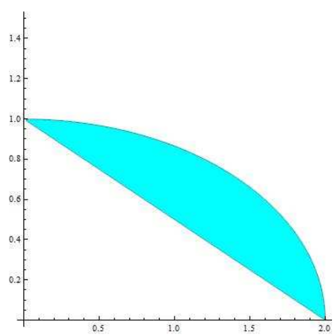
$$\int_C x^2 \sin\left(y^2\right) dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_0^y dx\, x^2 \sin\left(y^2\right) \ = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy\ \ \frac{1}{3}x^3 \sin\left(y^2\right)\Big|_0^y =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{\pi}} dy\, y^3 \sin(y^2) = \frac{1}{6}\int_0^{\pi} t\sin t\, dt = \frac{1}{6}\left(-t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt\right) = \frac{1}{6}\left(\pi + \sin t\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{6}$$

.

4. Sia $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \le \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b}\right\}$.
   Chiaramente $Area(D) = 4Area(\tilde{D})$ dove $\tilde{D} = D \cap \{(x,y)\ :\ x \ge 0,\ y \ge 0\ \}$.





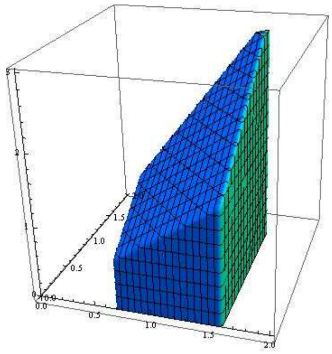
$$Area(\tilde{D}) = \int_{\tilde{D}} 1\, dxdy = \int_0^a dx \int_{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\ 1 = \int_0^a dx\ b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - b(1 - \frac{x}{a}) =$$

$$= \int_0^a dx\, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - ab - \frac{b}{2a}x^2\Big|_0^a = -\frac{1}{2}ab + \int_0^a dx\, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \overset{x=a\sin t}{=}$$

$$= -\frac{1}{2}ab + ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt = -\frac{1}{2}ab + ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = -\frac{1}{2}ab + \frac{\pi}{4}ab$$

Quindi $Area(D) = 4Area(\tilde{D}) = \pi ab - 2ab = (\pi-2)ab$

5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \log 2 \le x \le \log 5, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x+y\}$.



$$\int_E \frac{z}{x^2(x+y)\sinh x} dxdydz = \int_{\log 2}^{\log 5} dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} dz\, \frac{z}{x^2(x+y)\sinh x} =$$

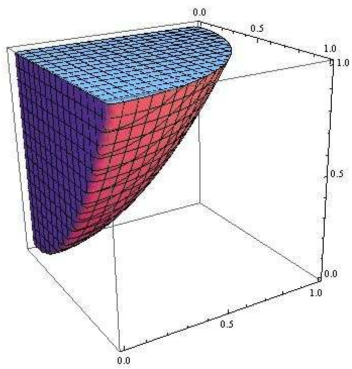
$$= \int_{\log 2}^{\log 5} dx \int_0^x dy\, \frac{z^2}{2x^2(x+y)\sinh x}\Big|_0^{x+y} = \int_{\log 2}^{\log 5} dx \int_0^x dy\, \frac{x+y}{2x^2\sinh x} =$$

$$= \int_{\log 2}^{\log 5} dx\, \frac{xy+\frac{1}{2}y^2}{2x^2\sinh x}\Big|_0^x = \int_{\log 2}^{\log 5} dx\, \frac{x^2+\frac{1}{2}x^2}{2x^2\sinh x} = \frac{3}{4}\int_{\log 2}^{\log 5} dx\, \frac{1}{\sinh x} = \frac{3}{2}\int_{\log 2}^{\log 5} dx\, \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{\log 2}^{\log 5} dx\, \frac{e^x}{e^{2x}-1} \overset{(t=e^x)}{=} \int_2^5 \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{3}{2}\int_2^5 \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}dt =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\log(t-1) - \log(t+1)\right)\Big|_2^5 = \frac{3}{4}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\Big|_2^5 = \frac{3}{4}\left(\log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\log 2$$

6. Sia $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x^2+y^2 \le z \le 1\}$.



Notiamo che $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \tilde{F}, x^2+y^2 \leq z \leq 1\right\}$ dove $\tilde{F} = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$ quindi per il teorema di Fubini

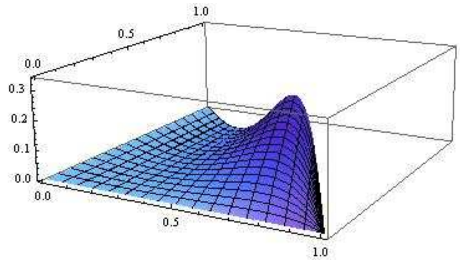
$$\int_F xy\ dxdydz = \int_{\tilde{F}} dxdy \int_{x^2+y^2}^1 dz\ \ xy = \int_{\tilde{F}} dxdy\ xyz\Big|_{x^2+y^2}^1 = \int_{\tilde{F}} dxdy\ \ xy - xy(x^2+y^2) =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\ \ xy - x^3y - xy^3 = \int_0^1 dx\ \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{4}xy^4\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x^2) - \frac{1}{2}x^3(1-x^2) - \frac{1}{4}x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x - x^3 - x^3 + x^5 - \frac{1}{2}x(1-2x^2-x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}x - x^3 + \frac{1}{2}x^5\ dx = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{24}x^6\Big|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

7. $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ x^5y \leq z \leq x^5y\ e^{x^2-xy}\right\}$
Notiamo che $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ x^5y \leq z \leq x^5y\ e^{x^2-xy}\right\}$



$$Vol(G) = \int_G 1\ dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_{x^5y}^{x^5ye^{x^2-xy}} dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy\ x^5ye^{x^2-xy} - x^5y =$$

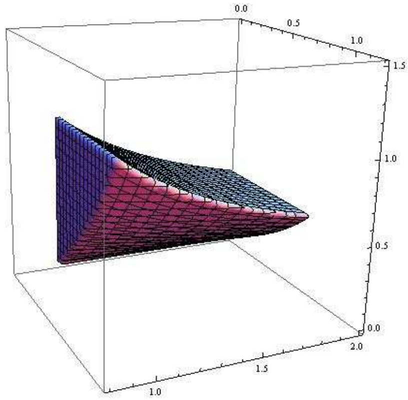
$$= \int_0^1 dx\ x^5e^{x^2} \int_0^x dy\ ye^{-xy} - \int_0^1 dx \int_0^x dy\ x^5y = \int_0^1 dx\ x^5e^{x^2}\left(-\frac{y}{x}e^{-xy}\Big|_0^x + \int_0^x \frac{e^{-xy}}{x}dy\right) +$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{2}x^7dx = \int_0^1 \left(-x^5 - \frac{x^5e^{x^2}}{x^2}e^{-xy}\Big|_0^x\right) dx - \frac{1}{16}x^8\Big|_0^1 = \int_0^1 -x^5 - x^3 + x^3e^{-x^2}\ dx - \frac{1}{16} =$$

$$= -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + \int_0^x x^3e^{x^2}dx - \frac{1}{16} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\int_0^1 te^tdt = -\frac{23}{48} + \frac{1}{2}\int_0^1 te^tdt =$$

$$= -\frac{23}{48} + \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\Big|_0^1\right) = -\frac{23}{48} + \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$$

8. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq \arctan(yz),\ 0 \leq yz \leq 1\}$.
$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \dfrac{1}{y}, 0 \leq x \leq \arctan(yz)\right\}$



$$\int_H \frac{x\log y}{1+y^2z^2}dxdydz = \int_1^2 dy \int_0^{\frac{1}{y}} dz \int_0^{\arctan(yz)} dx \; \frac{x\log y}{1+y^2z^2} = \int_1^2 dy \int_0^{\frac{1}{y}} dz \frac{1}{2}\frac{\log y \arctan^2(yz)}{1+y^2z^2}$$

$$\overset{(t=\arctan(yz))}{=} \frac{1}{2}\int_1^2 dy \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \frac{t^2 \log y}{y} = \frac{1}{2}\int_1^2 dy \; \frac{\log y}{y} \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{384}\int_1^2 \frac{\log y}{y} dy =$$

$$= \frac{\pi^3}{768}\log^2 y\Big|_1^2 = \frac{\pi^3}{768}\log^2 2$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

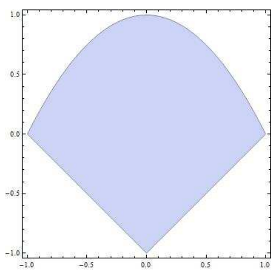
A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 9 (10/12 Maggio 2010)

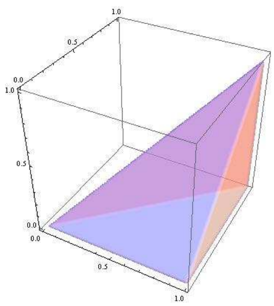
Integrali con Fubini e con cambio di varibile

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 1 \le y \le 1 - x^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, |x| - 1 \le y \le 1 - x^2\right\}.$



$$\int_A |x|\cos(\pi y)dxdy = \int_{-1}^{1} |x|dx \int_{|x|-1}^{1-x^2} \cos(\pi y)dy = \int_{-1}^{1} |x|dx \left[\frac{\sin(\pi y)}{\pi}\right]_{|x|-1}^{1-x^2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |x|dx \left(\sin\left(\pi\left(1-x^2\right)\right) - \sin(\pi(|x|-1))\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\left(\sin\left(\pi\left(1-x^2\right)\right) -\right.$$
$$\left.-\sin(\pi(x-1))\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin\left(\pi\left(1-x^2\right)\right)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin(\pi(x-1))dx \overset{t=\pi\left(x^2-1\right)}{=}$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(-t)}{2\pi}dt - \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-x\cos(\pi(x-1))}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi(x-1))}{\pi}dx\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(-t)}{2\pi}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi} + \left[\frac{\sin(\pi(x-1))}{\pi^2}\right]_0^1\right) = \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi^2}.$$

2. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le y\right\}.$

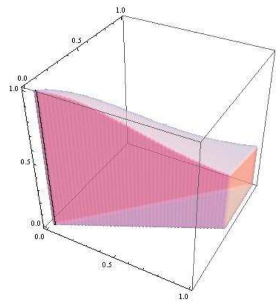


$$\int_B x^4y^2e^{xyz}dxdydz = \int_0^1 x^4dx \int_0^x y^2dy \int_0^y e^{xyz}dz = \int_0^1 x^4dx \int_0^x y^2dy \left[\frac{e^{xyz}}{xy}\right]_0^y =$$

$$= \int_0^1 x^3 dx \int_0^x y\left(e^{xy^2}-1\right) dy = \int_0^1 x^3 dx \left[\frac{e^{xy^2}}{2x} - \frac{y^2}{2}\right]_0^x = \int_0^1 x^3\left(\frac{e^{x^3}}{2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 e^{x^3}}{2} - \frac{x^5}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{e^{x^3}}{6} - \frac{x^6}{12} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{e}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{e}{6} - \frac{5}{12}.$$

3. $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \le 2y \le 2x \le 2, 0 \le x^2 z + y^2 z + z \le 1\right\} =$
$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, \frac{x}{2} \le y \le x, 0 \le z \le \frac{1}{x^2+y^2+1}\right\}$



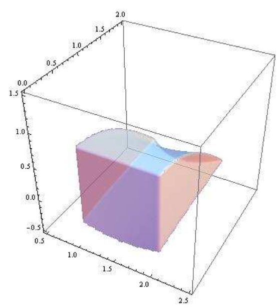
$$\int_C \left(x^2+y^2+1\right) \arctan x dx dy dz = \int_0^1 \arctan x dx \int_{\frac{x}{2}}^x \left(x^2+y^2+1\right) dy \int_0^{\frac{1}{x^2+y^2+1}} dz =$$

$$= \int_0^1 \arctan x dx \int_{\frac{x}{2}}^x \left(x^2+y^2+1\right) \frac{1}{x^2+y^2+1} dy = \int_0^1 \arctan x [y]_{\frac{x}{2}}^x = \int_0^1 \frac{x \arctan x}{2} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2 \arctan x}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{4\left(x^2+1\right)} dx = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - 1\right) dx = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}[\arctan x - x]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

4. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{(\pi+2y)^2} \le z \le \cos(y \sin x), 0 \le y \sin x \le \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi\right\} =$
$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{(\pi+2y)^2} \le z \le \cos(y \sin x), 0 \le y \le \frac{\pi}{2\sin x}, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi\right\}$

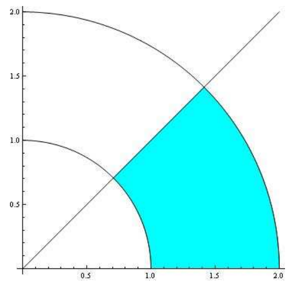


$$Vol(D) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} dx \int_0^{\frac{\pi}{2\sin x}} dy \int_{-\frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{(\pi+2y)^2}}^{\cos(y\sin x)} dz = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} dx \int_0^{\frac{\pi}{2\sin x}} \left(\cos(y\sin x) + \frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{(\pi+2y)^2}\right) dy =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} dx \left[\frac{\sin(y \sin x)}{\sin x} - \frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{2(\pi + 2y)} \right]_0^{\frac{\pi}{2 \sin x}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{2\pi + \frac{2\pi}{\sin x}} + \frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{2\pi} \right) dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\sin^4 x}{2\pi} + \frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{2\pi} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{2\pi} \right) dx =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} + \frac{\sin x \left(1 - \cos^2 x\right)}{2\pi} \right) dx \overset{t = \cos x}{=} - \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 - t^2} + \frac{1 - t^2}{2\pi} \right) dt =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2\pi} - \frac{t^2}{2\pi} \right) dt = \left[\frac{\log(1+t)}{2} - \frac{\log(1-t)}{2} + \frac{t}{2\pi} - \frac{t^3}{6\pi} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{2} - \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{48\pi} - \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{2} + \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{48\pi} = \log\left(\frac{3}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{24}\pi =$$
$$= \log 3 + \frac{11}{24}\pi.$$

5. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\} \quad f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

Passiamo in coordinate polari cioè poniamo $(x,y) = \Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.



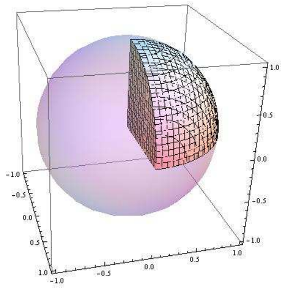
Notiamo che $\Phi^{-1}(A) = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2,\ \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$ e che la matrice Jacobiana di Φ è $J\Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow |\det J\Phi| = \rho$.

Per la formula del cambio di variabile abbiamo quindi che

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{\Phi^{-1}(A)} f(\Phi(\rho,\theta))\ \rho\ d\rho d\theta = \int_{\Phi^{-1}(A)} \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\rho\ d\rho d\theta = \int_{\Phi^{-1}(A)} \rho\tan\theta\ d\rho d\theta =$$
$$= \int_1^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \rho\tan\theta = \int_1^2 d\rho\ \rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \tan\theta = \int_1^2 d\rho\ \rho \left(-\log\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log 2 \int_1^2 \rho\ d\rho =$$
$$= \frac{1}{2}\log 2\ \frac{1}{2}\rho^2\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\log 2(4-1) = \frac{3}{4}\log 2.$$

6. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x,y,z \ge 0\right\} \quad f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

Passiamo in coordinate sferiche cioè poniamo
$(x,y,z) = \Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$.
Notiamo che $\Phi^{-1}(B) = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$
e che la matrice Jacobiana di Φ è $J\varphi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$



$\Longrightarrow |\det J\Phi| = \rho^2 \sin\varphi$.
Per la formula del cambio di variabile abbiamo quindi che

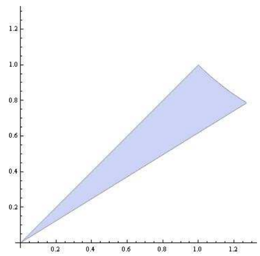
$$\int_B f(x,y,z)\, dxdydz = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(\rho,\theta,\varphi))\rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^4 \cos^2\theta \sin\varphi}{4-\rho^2}$$

$$= \int_0^1 d\rho \frac{\rho^4}{4-\rho^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ \cos^2\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \ \sin\varphi = \int_0^1 d\rho \frac{\rho^4}{4-\rho^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ \cos^2\theta \, (-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \int_0^1 d\rho \frac{\rho^4}{4-\rho^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ \cos^2\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^1 d\rho \frac{\rho^4}{4-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(-4-\rho^4 + \frac{4}{2-\rho} + \frac{4}{2+\rho}\right) d\rho =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[-4\rho - \frac{\rho^3}{3} - 4\log(2-\rho) + 4\log(2+\rho)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(4\log 3 - \frac{13}{3}\right) = \pi\left(\log 3 - \frac{13}{12}\right)$$

7. $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^2 - y^2 \le xy \le 1, \ x \ge 0\right\} \quad f(x,y) = (x^4 - y^4)e^{xy}$



Poniamo $u = x^2 - y^2$ e $v = xy$ cioè $(u,v) = G(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$.
$G(C) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le u \le v \le 1\} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le u \le 1, \ u \le v \le 1\}$.
Notiamo che se $(x,y) \in C$ allora $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases} \Longrightarrow u^2 + 4v^2 = (x^2 + y^2)^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + 4v^2}$ da cui ricaviamo che $\begin{cases} \sqrt{u^2+4v^2} + u = 2x^2 \\ \sqrt{u^2+4v^2} - u = 2y^2 \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2+4v^2} + u)} \\ y = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2+4v^2} - u)} \end{cases}$ Questo ci dice che G è una applicazione biettiva tra G e $G(B)$ e che $G^{-1}(u,v) = \Phi(u,v) = (\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2+4v^2} + u)}, \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2+4v^2} - u)})$.

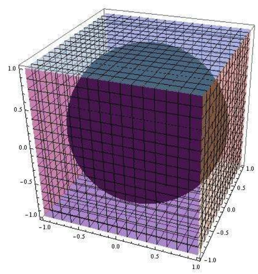
Il cambio di variabili $(u,v) = \Phi(x,y)$ è equivalente a $(x,y) = \Phi(u,v)$. Inoltre $\Phi^{-1}(C) = G(C)$ e $\det JG(x,y) = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} = 2(x^2+y^2)$ quindi $\det J\Phi(u,v) = \frac{1}{2(x^2+y^2)}\Big|_{(x,y)=\Phi(u,v)}$.
Per il teorema del cambio di variabile abbiamo quindi che

$$\int_C f(x,y)dxdy = \int_{\Phi^{-1}(C)} f(\Phi(x,y))\frac{1}{2(x^2+y^2)}\Big|_{(x,y)=\Phi(u,v)} dudv = \frac{1}{2}\int_{\Phi^{-1}(C)} (x^2-y^2)e^{xy}\Big|_{(x,y)=\Phi(u,v)} dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Phi^{-1}(C)} ue^v dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_u^1 dv\, ue^v = \frac{1}{2}\int_0^1 ue^v|_u^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 du\, eu - ue^u =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}u^2\Big|_0^1 - ue^u\Big|_0^1 + \int_0^1 e^u\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} - e + e - 1\right) = \frac{e}{4} - \frac{1}{2}$$

8. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,|y|,|z|\} \le 1 \le x^2+y^2+z^2\right\} \quad f(x,y) = x^2y^2z^2$



Notiamo che $D = D_1 \backslash D_2$ dove $D_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,|y|,|z|\} \le 1\right\}$ e D_2 è la palla unitaria di $\mathbb{R}^3$ $D_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$.
Per il teorema di Fubini abbiamo che

$$\int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dz\, x^2y^2z^2 = 8\int_0^1 dx\, x^2 \int_0^1 dy\, y^2 \int_0^1 dz z^2 = \frac{8}{27}$$

Passando alle coordinate sferiche abbiamo invece che

$$\int_{D_2} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi\, f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi\, \rho^8\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^5\varphi\cos^2\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\, \frac{1}{4}\rho^8\sin^2(2\theta)\sin^5\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= \frac{1}{36}\int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2(2\theta)\sin^5\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{72}\int_0^\pi d\varphi \int_0^{4\pi} dt\sin^2(t)\sin^5\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{36}\int_0^\pi \sin^5\varphi\cos^2\varphi \overset{t=\cos\varphi}{=} \frac{\pi}{36}\int_{-1}^1 (1-t^2)^2t^2 = \frac{\pi}{18}\int_0^1 \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right)dt =$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{18}\,\frac{8}{105} = \frac{4}{945}\pi$$

Pertanto

$$\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz - \int_{D_2} f(x,y,z)dxdydz = \frac{8}{27} - \frac{4}{945}\pi$$

9. $E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : < Mx, x > \leq 1\right\}$
Siccome D è simmetirca e definita positiva allora per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale Q tale che $Q^T M Q = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
Consideriamo allora il cambio di variabile $x = \Phi(y) = Qy$. Si noti che $|\det J\Phi| = |\det Q| = 1$ perché Q è ortogonale.
Inoltre $\Phi^{-1}(E) = \{y \in \mathbb{R}^3 \ : < MQy, Qy > \leq 1\}$ ma $< MQy, Qy > = < Q^T MQy, y > = < Dy, y > = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ quindi $\Phi^{-1}(E) = \{y \in \mathbb{R}^3 \ : \ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 \leq 1\}$ è l'ellissoide in $\mathbb{R}^3$ centrato nell'origine avente semiassi di lunghezze $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$. Per la formula del cambiamento di variabile abbiamo quindi che
$Vol(E) = \displaystyle\int_E 1 \ dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 \ dy_1 dy_2 dy_3$. Consideriamo ora il cambio di variabile $(z_1, z_2, z_3) = \Psi(y_1, y_2, y_3) = (\sqrt{\lambda_1} y_1, \sqrt{\lambda_2} y_2, \sqrt{\lambda_3} y_3)$. Dato che $\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(E)) = \{(z_1, z_2, z_3) \ : \ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \leq 1\} = B_1(0)$ è la palla unitaria di $\mathbb{R}^3$ e $\det J\Psi = \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3}$ abbiamo

$$Vol(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 \ dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{B_1(0)} \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3} \ dz_1 dz_2 dz_3 = \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3} Vol(B_1(0)) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\det M}$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

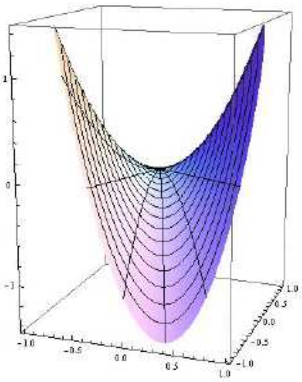
Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 10 (17 Maggio 2010)
Integrali impropri, superfici

1. $A = \left\{(x, y, x^2 + 2xy - y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

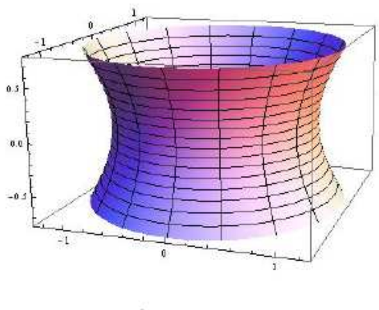


Una parametrizzazione della superficie A è data da $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + 2uv - v^2)$ con $(u, v) \in \tilde{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
$\Phi_u = (1, 0, 2u + 2v)$
$\Phi_v = (0, 1, 2u - 2v)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u+2v \\ 0 & 1 & 2u-2v \end{vmatrix} = (-2u - 2v, 2v - 2u, 1)$
$|\Phi_u \wedge \Phi_v| = \sqrt{(2u + 2v)^2 + (2v - 2u)^2 + 1} = \sqrt{1 + 8(u^2 + v^2)}$ quindi passando in coordinate polari

$$Area(A) = \int_{\tilde{A}} |\Phi_u \wedge \Phi_v| du dv = \int_{\tilde{A}} \sqrt{1 + 8(u^2 + v^2)} du dv = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\ \rho\sqrt{1 + 8\rho^2} =$$

$$= 2\pi \int_0^1 d\rho\ \rho\sqrt{1 + 8\rho^2} \overset{(s=1+8\rho^2)}{=} \frac{\pi}{8} \int_1^9 \sqrt{s}\, ds = \frac{\pi}{8}\ \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{\pi}{8}\left(18 - \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{6}\pi$$

2. $\Phi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u) \qquad (u, v) \in [-\log 2, \log 2] \times [0, 2\pi]$



$\Phi_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$

$\Phi_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (-\cosh^2 u \cos v, -\cosh^2 u \sin v, \sinh u \cosh u)$
$|\Phi_u \wedge \Phi_v| = \sqrt{\cosh^4 u \cos^2 v + \cosh^4 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cosh^2 v} =$
$= \cosh u \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}$

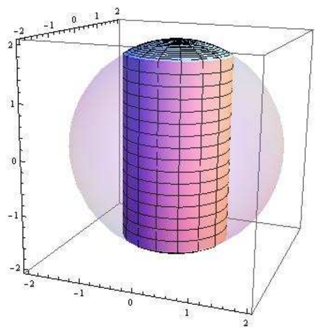
$$\int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2} d\sigma = \int_{-\log 2}^{\log 2} du \int_0^{2\pi} dv \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}\ \cosh u \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u} =$$

$$= 2\pi \int_{-\log 2}^{\log 2} du \cosh^3 u + \sinh^2 u \cosh u = 2\pi \int_{-\log 2}^{\log 2} \cosh u (1 + \sinh^2 u) + \cosh u \sinh^2 u du =$$

$$= 2\pi \int_{-\log 2}^{\log 2} du\ \ \cosh u + 2\cosh u \sinh^2 u \ = \ 4\pi \int_0^{\log 2} du\ \ \cosh u + 2 \cosh u \sinh^2 u =$$

$$= 4\pi \left(\sinh u + \frac{2}{3} \sinh^3 u \Big|_0^{\log 2} \right) = 4\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \right) = 4\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{32} \right) = \frac{33}{8}\pi$$

3. $C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le 1 \right\}$



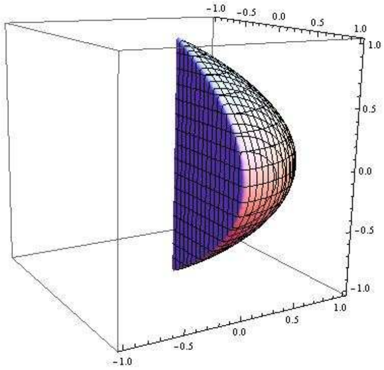
$\partial C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ dove
$C_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 \le 1,\ z > \sqrt{3} \right\}$
$C_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 \le 1,\ z < \sqrt{3} \right\}$
$C_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :; x^2+y^2 = 1,\ |z| \le \sqrt{3} \right\}$.
Calcoliamo l'area di queste tre superfici.
Una parametrizzazione di C_1 è $\Phi(u,v) = (2\cos u \sin v, 2 \sin u \sin v, 2\cos v)$ con $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
$\Phi_u = (-2\sin u \sin v, 2\cos u \sin v, 0)$
$\Phi_v = (2\cos u \cos v, 2 \sin u \cos v, -2 \sin v)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (-4\cos u \sin^2 v, -4 \sin u \sin^2 v, -4 \sin v \cos v)$
$|\Phi_u \wedge \Phi_v| = 4\sqrt{\cos^2 u \sin^4 v + \sin^2 u \sin^4 v + \sin^2 v \cos^2 v} = 4 \sin v$

$$Area(C_1) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dv \int_0^{2\pi} du |\Phi_u \wedge \Phi_v| = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} dv \int_0^{2\pi} du\ \sin v = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} dv\ \sin v = -8\pi \cos v \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$= 8\pi (1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ Per la simmetria di C $Area(C_2) = Area(C_1)$.
Resta da calcolare l'area di C_3. Una parametrizzazione di E_3 è $\Phi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ con $u \in [0, 2\pi]$ e $z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
$\Phi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$
$\Phi_v = (0,0,1)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (\cos u, \sin v, 0) \Longrightarrow |\Phi_u \wedge \Phi_v| = 1$ quindi $Area(C_3) = \displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} du \int_0^2 \pi du\ 1 = 4\pi\sqrt{3}$

Pertanto $Area(\partial C) = Area(C_1) + Area(C_2) + Area(C_3) = 16\pi(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 4\pi\sqrt{3} =$
$= 16\pi - 4\pi\sqrt{3}$

4. $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq (z^2 - 1)^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ |z| \leq 1\right\} \qquad f(x, y, z) = |z|e^{z^2}.$



Passiamo in coordinate cilindriche cioè poniamo $(x, y, z) = \Phi(\rho, \theta, t) = \Phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)$.

$J\Phi(\rho, \theta, t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\det J\Phi(\rho, \theta, t)| = \rho$

$\Phi^{-1}(D) = \{(\rho, \theta, t) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \leq (1 - t^2), \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \ t \in [-1, 1] \ \}$
quindi per il teorema del cambio di variabile si ha che

$$\int_D |z|e^{z^2} dxdydz = \int_{\Phi^{-1}(A)} f(\Phi(\rho, \theta, t))\rho d\rho d\theta dt = \int_{-1}^{1} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1-t^2} d\rho \ |t|e^{t^2}\rho \ =$$

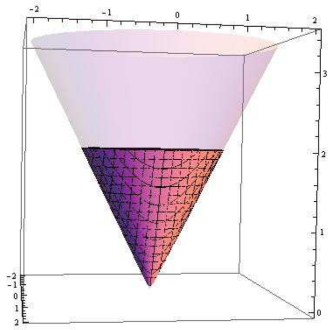
$$= \int_{-1}^{1} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ |t|e^{t^2} \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_0^{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta |t|e^{t^2}(1 - t^2)^2 = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} dt|t|e^{t^2}(1 - t^2)^2$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 t(1-2t^2+t^4)e^{t^2} dt = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (t-2t^3+t^5)e^{t^2} = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 te^{t^2} dt + \int_0^1 (t^5 - 2t^3)e^{t^2} dt\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (s^2 - 2s)e^s ds\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(s^2 - 2s)e^s\Big|_0^1 - \int_0^1 (s - 1)e^s ds\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2} - (s - 1)e^s\Big|_0^1 + \int_0^1 e^s ds\right) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1 + e - 1\right) = \frac{\pi}{2}e - \frac{5}{4}\pi$$

5. $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}\right\} \qquad f(x, y, z) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}$



L'integrale è improprio sia perché l'insieme E non è limitato sia perché f ha una singolarità nell'origine. Per definizione $\displaystyle\int_E f(x,y,z)dxdydz = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_{E\cap B_R(0)\setminus B_r(0)} f(x,y,z)dxdydz$

Sia $E_r^R = E \cap B_R(0)\setminus B_r(0)$. Passando in coordinate sferiche $(x,y,z) = \Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\phi)$ abbiamo che $\Phi^{-1}(E_r^R) = \{(\rho,\theta,\varphi) \ : \ r \le \rho \le R, \ \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [0,\frac{\pi}{6}]\}$ quindi peri il teorema del cambio di variabile

$$\int_{E_r^R} f(x,y,z)dxdydz = \int_{\Phi^{-1}(E_r^R)} f(\Phi(\rho,\theta,\varphi))\rho^2\sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_r^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\rho^2(1+\rho^2)} =$$

$$= 2\pi \int_r^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \frac{\sin\varphi}{1+\rho^2} = 2\pi \int_r^R d\rho \left. -\frac{\cos\varphi}{1+\rho^2}\right|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\int_r^R \frac{d\rho}{1+\rho^2} =$$

$$= 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\arctan R - \arctan r)$$

Pertanto $\displaystyle\int_E f(x,y,z)dxdydz = \lim_{r\to 0, R\to\infty} 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\arctan R - \arctan r) = \pi^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

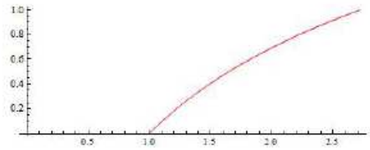
A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 10 (17 Maggio 2010)

Integrali

1. $\omega = x^2 y\, dx + (e^{3y} + x^3) dy \quad \gamma(t) = (t, \log t)\ t \in [1, e]$.



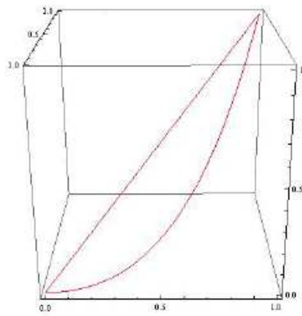
$\dot\gamma\,(t) = (1, \frac{1}{t})$.

$$\int_\gamma \omega = \int_1^e < (t^2 \log t, e^{3\log t} + t^3), \dot\gamma\,(t) > dt = \int_1^e t^2 \log t + \frac{1}{t}\left(e^{3\log t} + t^3\right) dt = \int_1^e t^2 \log t + 2t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3} t^3 \log t \Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e t^2 dt + 2\int_1^e t^2 dt = \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{3}\int_1^e t^2 dt = \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{9}t^3\Big|_1^e = \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{9}e^3 - \frac{5}{9} =$$

$$= \frac{8}{9}e^3 - \frac{5}{9}$$

2. $\omega = z\sin(\pi y)\, dx + xe^z\, dy + xy\, dz$.
$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ dove $\gamma_1(t) = (t, t^2, t^3)\ t \in [0,1]$ e $\gamma_2(t) = (t, t, t)\ t \in [0, 1]$.



$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 < (t^3 \sin(\pi t^2), te^{t^3}, t^3), (1, 2t, 3t^2) > dt = \int_0^1 t^3 \sin(\pi t^2) + 2t^2 e^{t^3} + 3t^5\, dt =$$

$$= \int_0^1 t^3 \sin(\pi t^2) dt + \frac{2}{3}e^{t^3} + \frac{1}{2}t^6\Big|_0^1 = \int_0^1 t^3 \sin(\pi t^2) dt + \frac{2}{3}e - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \overset{s=\pi t^2}{=} \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi s \sin s\, ds +$$

$$+ \frac{2}{3}e - \frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi^2}\left(-s\cos s\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos s\, ds\right) + \frac{2}{3}e - \frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi^2}\sin s\Big|_0^\pi + \frac{2}{3}e - \frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{3}e - \frac{1}{6}$$

$$\int_{\gamma_2}\omega=\int_0^1 <(t\sin(\pi t),te^t,t^2),(1,1,1)>dt=\int_0^1 t\sin(\pi t)+te^t+t^2dt=-\left.t\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right|_0^1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos(\pi t)dt+\left.te^t\right|_0^1-\int_0^1 e^tdt+\left.\frac{1}{3}t^3\right|_0^1=\frac{1}{\pi}+\left.\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi t)\right|_0^1+e-e+1+\frac{1}{3}=\frac{1}{\pi}+\frac{4}{3}$$

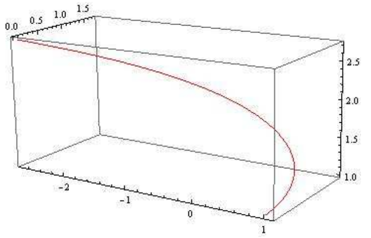
Quindi $\displaystyle\int_\gamma\omega=\int_{\gamma_1}\omega-\int_{\gamma_2}\omega=\frac{1}{2\pi}+\frac{2}{3}e-\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}e-\frac{3}{2}-\frac{1}{2\pi}$

3. $\displaystyle\omega=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+2}+\sin y\right)dx+\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+2}+x\cos y\right)dy+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+2}dz.$

(a) $\displaystyle\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+2}+\sin y\right)=\frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2+2)^2}+\cos y=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+2}+x\cos y\right)$
$\displaystyle\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+2}+\sin y\right)=\frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2+2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+2}$
$\displaystyle\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+2}+x\cos y\right)=\frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2+2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+2}$ quindi ω è chiusa

(b) Dato che ω è chiusa su tutto $\mathbb{R}^3$ (che è un insieme semplicemente connesso) allora ω è esatta. Cerchiamo un potenziale di V cioè una funzione $V(x,y,z)$ tale che
$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+2}+\sin y\\ \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+2}+x\cos y\\ \frac{\partial V}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+2}\end{cases}$$
Dall'ultima relazione ricaviamo che $V(x,y,z)=\log(x^2+y^2+z^2+2)+a(x,y)$.
Da questo e dalla seconda relazione ricaviamo che $\displaystyle\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+2}+\frac{\partial a}{\partial y}=$
$\displaystyle=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+2}+x\cos y\Longrightarrow\frac{\partial a}{\partial y}=x\cos y\Longrightarrow a(x,y)=x\sin y+b(x)$. Dunque $V(x,y,z)=\log(x^2+y^2+z^2+2)+x\sin y+b(x)$.
Derivando in x e utilizzando la prima relazione del sistema otteniamo che
$\displaystyle\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+2}+\sin y+b'(x)=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+2}+\sin y\Rightarrow b'(x)=0\Rightarrow b(x)=c.$
$V(x,y,z)=\log(x^2+y^2+z^2+2)+x\sin y+c$. Al variare di c otteniamo tutti i possibili potenziali della forma ω. Se vogliamo che $V(0,0,0)=\log 2$ dobbiamo prendere $c=0$ e quindi $V(x,y,z)=\log(x^2+y^2+z^2+2)+x\sin y$.

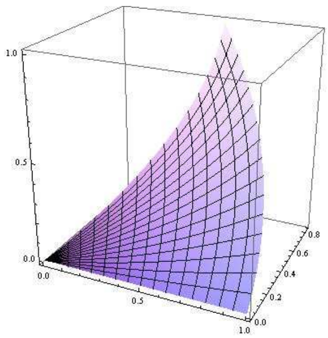
(c) $\gamma(t)=(e^t\cos(\pi t),e^t\sin(\pi t),e^t)\qquad t\in[-1,1]$.



Dato che ω è esatta con potenziale $V(x,y,z)$ abbiamo che

$$\int_\gamma \omega = V(\gamma(1)) - V(\gamma(-1)) = V(-e,0,e) - V(-e^{-1},0,-e^{-1}) = \log(2e^2+2) - \log(\frac{2}{e^2}+2)$$
$$= \log(2e^2+2) - \log\left(\frac{2e^2+2}{e^2}\right) = \log(e^2) = 2$$

4. $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ con $0 \le v \le u \le 1$.



$\Phi_u = (\cos v, \sin v, 0)$
$\Phi_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (\sin v, -\cos v, u)$
$|\Phi_u \wedge \Phi_v| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1+u^2}$.

$$Area(\Sigma) = \int_0^1 du \int_u^1 dv |\Phi_u \wedge \Phi_v| = \int_0^1 du \int_0^u dv\ \sqrt{1+u^2} = \int_0^1 du\ u\sqrt{1+u^2}du \overset{t=u^2}{=}$$

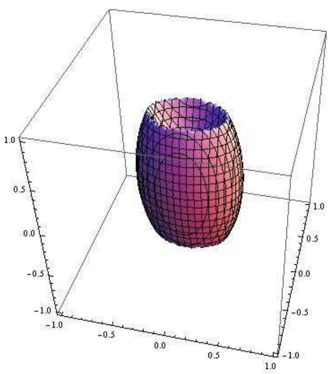
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}$$

$$\int_\Sigma z^2 d\sigma = \int_0^1 du \int_0^u dv\ v^2\sqrt{1+u^2}\ =\ \frac{1}{3}\int_0^1 du\ u^3\sqrt{1+u^2}\ \overset{t=u^2}{=}\ \frac{1}{6}\int_0^1 t\sqrt{1+t}\ dt\ =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}t\,(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{2} - \frac{1}{9}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{45}(1+t)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{2} - \frac{8}{45}\sqrt{2} + \frac{2}{45} = \frac{2}{45}\sqrt{2} + \frac{2}{45}$$

5. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2+9y^2+z^2 \le 1, z^2 \le 4x^2+9y^2\}$ $\qquad \int_A \sqrt{4x^2+9y^2}dxdydz$.



Consideriamo il cmbio di variabile $(x,y,z) = \Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\frac{1}{2}\rho\cos\theta\sin\varphi, \frac{1}{3}\rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$

$|\det J\Phi(\rho,\theta,\varphi)| = \frac{1}{6}\rho^2\sin\varphi$ e $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{\pi}{4}\varphi \le \frac{3}{4}\pi\}$
quindi

$$\int_A \sqrt{4x^2+9y^2}dxdydz = \int_{\Phi^{-1}(A)} \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi}\,\frac{1}{6}\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{6}\rho^3\sin^2\varphi$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho\rho^3\sin^2\varphi = \frac{\pi}{12}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi\ \sin^2\varphi = \frac{\pi}{12}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi\ \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} = \frac{\pi}{24}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi\ 1-\cos(2\varphi)$$

$$= \frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi}{48}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\pi^2}{48} + \frac{\pi}{24}$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

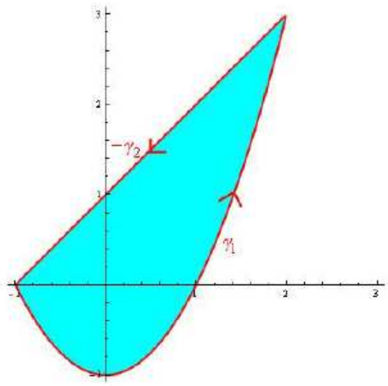
Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 11 (26 Maggio 2010)
Teoremi di Gauss-Green, divergenza e Stokes

1. $\omega = e^x dx + xy\, dy \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le x+1\}$.



Se $M(x,y) = e^x$ e $N(x,y) = xy$ dobbiamo verificare che $\int_{\partial^+ A} \omega = \int_A \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dxdy$
$A = \{(x,y) \mid x \in [-1,2]\ x^2 - 1 \le y \le x+1\}$.

$$\int_A \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^{x+1} dy\ y - 0 = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^{x+1} dyy = \int_{-1}^2 dx\ \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2-1}^{x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^2 (x+1)^2 - (x^2-1)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 x^2+2x+1-x^4+2x^2-1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 2x+3x^2-x^4\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{10}x^5 \Big|_{-1}^2 = 2 - \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} - \frac{16}{5} - \frac{1}{10} = 6 - \frac{33}{10} = \frac{27}{10}$$

$\partial^+ A = \gamma_1 - \gamma_2$ dove $\gamma_1(t) = (t, t^2-1)\ t \in [-1,2]$ e $\gamma_2(t) = (t, t+1)\ t \in [-1,2]$
$\gamma_1(t) = (t, t^2-1)\ t \in [-1,2] \implies \dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-1}^2 (e^t, t(t^2-1)).(1,2t)dt = \int_{-1}^2 e^t + 2t^2(t^2-1) = \int_1^2 e^t + 2t^4 - 2t^2 dt = e^t + \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 \Big|_{-1}^2$$

$$= e^2 - \frac{1}{e} + \frac{64}{5} + \frac{2}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = e^2 - \frac{1}{e} + \frac{66}{5} - \frac{18}{3} = e^2 - \frac{1}{e} + \frac{36}{5}$$

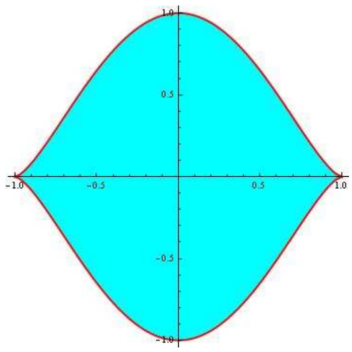
$\gamma_2(t) = (t, t+1) \quad t \in [-1,2] \implies \dot{\gamma_2}(t) = (1,1)$ quindi

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{-1}^2 (e^t, t^2+t).(1,1) = \int_{-1}^2 e^t + t^2 + t\ dt = e^t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \Big|_{-1}^2 = e^2 - \frac{1}{e} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} =$$

$$= e^2 - \frac{1}{e} + \frac{9}{2}$$

Quindi $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \frac{36}{5} - \frac{9}{2} = \frac{27}{10}$

2. Sia E l'insieme delimitato dalla curva $\gamma(t) = \big(\cos t, \sin^3 t\big)$ per $t \in [0, 2\pi]$.



Per il teorema di Gauss-Green abbiamo che
$Area(E) = \int_E 1\, dxdy = \int_\gamma 0\, dx + x\, dy = \int_0^{2\pi} (0, \cos t).(-\sin t, 3\sin^2 t \cos t)\, dt =$
$= \int_0^{2\pi} 3\cos^2 \sin^2 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{3}{8}\int_0^{4\pi} \sin^2 s\, ds = \frac{3}{4}\pi$

3. $\omega = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy$ e $\gamma_R(t) = (R\cos t, R\sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

   (a) $\frac{\partial}{\partial y} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{6yx^2 - 2y^3}{(x^2+y^2)^3}$
   $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y(x^2+y^2)^2 + 8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{6yx^2 - 2y^3}{(x^2+y^2)^3}$.

   (b) $\gamma_R(t) = (R\cos t, R\sin t)$ per $t \in [0, 2\pi] \Longrightarrow \dot{\gamma}\,(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

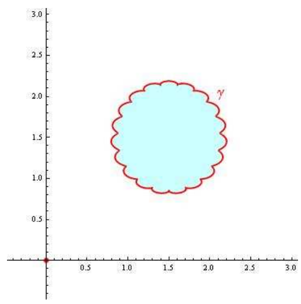
$$\int_{\gamma_R} \omega = \int_0^{2\Pi} < (\frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{R^2}, -\frac{2\sin t\cos t}{R^2}), (-R\sin t, R\cos t) > dt =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} -\sin^3 t + \cos^2 t \sin t - 2\sin t\cos^2 t = \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} -\sin t(1-\cos^2 t) - \cos^2 t \sin t\; dt$$

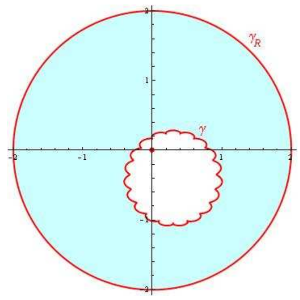
$$= -\frac{1}{R}\int_0^{2\pi} \sin t\; dt = \frac{1}{R}\cos t\Big|_0^{2\pi} = 0$$

   (c) Facciamo vedere che l'integrale di ω lungo ogni curva chiusa in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ è nullo. Dato che ogni curva chiusa si decompone in curve chiuse e semplici possiamo restringerci a considerare le curve chiuse e semplici. Possiamo anche supporre che la curva sia percorsa in senso antiorario. Sia dunque γ una curva chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ percorsa in senso antiorario.

   Se γ non gira intorno all'origine allora possiamo applicare il teorema di Gauss-Green alla regione E racchiusa dalla curva γ. Se $M(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $N(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ sappiamo che M, N sono di classe $C^1(E)$ e che $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ perchè ω è chiusa. Ma allora per Gauss-Green



$$\int_\gamma \omega = \int_{\partial^+ E} \omega = \int_E \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} dxdy = 0$$



Supponiamo invece che γ giri attorno all'origine. Prendiamo $R > 0$ tale che γ sia contenuta in $B_R(0,0)$ e chiamiamo E l'insieme delimitato da γ e da γ_R. Di nuovo M, N sono di classe $C^1(E)$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ quindi dato che $\partial^+ E = \gamma_R - \gamma$ applicando il teorema di Gauss-Green ad ω in E abbiamo

$$\int_{\gamma_R} \omega - \int_\gamma \omega = \int_{\partial^+ E} \omega = \int_E \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dxdy = 0 \text{ da cui } \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_R} \omega = 0.$$

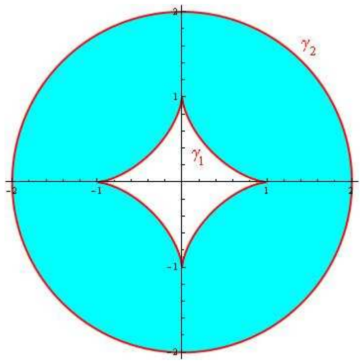
Quindi l'integrale di ω lungo ogni curva chiusa in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ è nullo e dunque ω è esatta.

4. $\omega = -\dfrac{3x^2y^3}{x^6+y^6}dx + \dfrac{3x^3y^2}{x^6+y^6}dy$

   (a) $$\frac{\partial}{\partial y} - \frac{3x^2y^3}{x^6+y^6} = -\frac{9x^2y^2(x^6+y^6) - 18x^2y^8}{(x^6+y^6)^2} = \frac{9x^2y^8 - 9x^8y^2}{(x^6+y^6)^2}$$
   $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{3x^3y^2}{x^6+y^6} = \frac{9x^2y^2(x^6+y^6) - 18x^8y^2}{(x^6+y^6)^2} = \frac{9x^2y^8 - 9x^8y^2}{(x^6+y^6)^2}$$

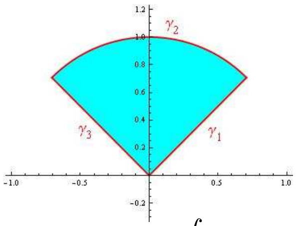
   (b) $\gamma_1(t) = \left(\sqrt[3]{\cos t}, \sqrt[3]{\sin t}\right)$ per $t \in [0, 2\pi]$ $\quad \dot{\gamma_1} = \left(-\frac{\sin t}{3\cos^{\frac{2}{3}} t}, \frac{\cos t}{3\sin^{\frac{2}{3}} t}\right)$.
   $$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{2\pi} < (-3\sin t \cos^{\frac{2}{3}}, 3\cos t \sin^{\frac{2}{3}} t), \left(-\frac{\sin t}{3\cos^{\frac{2}{3}} t}, \frac{\cos t}{3\sin^{\frac{2}{3}} t}\right) > dt =$$
   $$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

   (c) Sia E la regione delimitata da γ_1 e γ_2.



   Se $M(x,y) = -\frac{3x^2y^3}{x^6+y^6}$ e $N(x,y) = \frac{3x^3y^2}{x^6+y^6}$ allora dato che ω è chiusa per il teorema di Gauss-Green abbiamo
   $$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\partial^+ E} \omega = \int_E \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dxdy = 0 \text{ da cui } \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = 2\pi$$

5. $F(x,y) = \big(xy, y^2\big) \quad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|\big\}$.



Dobbiamo verificare che $\int_B \text{div } F\, dxdy = \int_{\partial B} < F, \tau > dl.$
div $F = y + 2y = 3y$ quindi passando in coordinate polari abbiamo che

$$\int_B \text{div } F dxdy = \int_B 3y\ dxdy = \int_0^1 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} 3\rho^2 \sin\theta = 3\int_0^1 d\rho\rho^2 \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} =$$

$$= 3\sqrt{2}\int_0^1 \rho^2 d\rho = \sqrt{2}$$

$\partial B = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ dove $\gamma_1(t) = (t,t)\ t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)\ t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ e $\gamma_3(t) = (-t, t)\ t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.
$\gamma_1(t) = (t,t)\ t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\quad \dot{\gamma_1}\ (t) = (1,1), \quad \tau(\gamma_1(t)) = \frac{(1,-1)}{|\dot{\gamma_1}(t)|}$

$$\int_{\gamma_1} < F, \tau > dl = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} < (t^2, t^2), \frac{(1,-1)}{|\ \dot{\gamma_1}\ (t)|} > |\ \dot{\gamma_1}\ (t)| dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 - t^2\ dt = 0$$

$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)\ t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ $\quad \dot{\gamma_2}\ (t) = (-\sin t, \cos t), \quad \tau(\gamma_2(t)) = \frac{(\cos t, \sin t)}{|\dot{\gamma_1}(t)|}$

$$\int_{\gamma_2} < F, \tau > dl = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} < (\cos t \sin t, \sin^2 t), \frac{(\cos t, \sin t)}{|\ \dot{\gamma_1}\ (t)|} > |\ \dot{\gamma_1}\ (t)| dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos^2 t \sin t + \sin^3 t dt$$

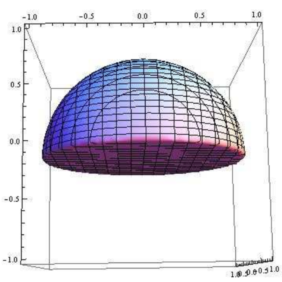
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos^2 t \sin t + \sin t(1 - \cos^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin t\ dt = -\cos t\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$\gamma_3(t) = (-t, t)\ t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\quad \dot{\gamma_3}\ (t) = (-1, 1), \quad \tau(\gamma_3(t)) = \frac{(-1,-1)}{|\dot{\gamma_1}(t)|}$

$$\int_{\gamma_3} < F, \tau > dl = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} < (-t^2, t^2), \frac{(-1,-1)}{|\ \dot{\gamma_1}\ (t)|} > |\ \dot{\gamma_1}\ (t)| dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 - t^2\ dt = 0$$

Quindi $\int_{\partial B} < F, \tau > dl = \int_{\gamma_1} < F, \tau > dl + \int_{\gamma_2} < F, \tau > dl + \int_{\gamma_3} < F, \tau > dl = \sqrt{2}$

6. $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}, \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}, \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\right)$
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$.



$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} - \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} - \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$
$$= -\frac{2x+2y+2z}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}.$$

Passando in coordinate sferiche abbiamo che

$$\int_E \text{div } F\, dxdydz = -2\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho\cos\theta\sin\varphi + \rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{(1+\rho^2)^2}\rho^2\sin\varphi =$$

$$= -4\pi\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \frac{\rho^3\cos\varphi\sin\varphi}{(1+\rho^2)^2} = -2\pi\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \frac{\rho^3\sin(2\varphi)}{(1+\rho^2)^2} = \pi\int_0^1 d\rho\ \ \frac{\rho^3\cos(2\varphi)}{(1+\rho^2)^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -2\pi\int_0^1 \frac{\rho^3}{(1+\rho^2)^2} = -\pi\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}dt = -\pi\int_0^1 \frac{t+1-1}{(1+t)^2}dt = -\pi\int_0^1 \frac{1}{(1+t)} - \frac{1}{(1+t)^2}dt =$$

$$= -\pi\log(1+t) - \frac{\pi}{1+t}\Big|_0^1 = -\pi\log 2 - \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} - \pi\log 2$$

$\partial E = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dove $\Sigma_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ $\quad \Sigma_2 = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

Una parametrizzazione di Σ_1 è data da
$\Phi(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$ con $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
$\Phi_u = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0)$
$\Phi_v = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\sin v \cos v)$
$\tau = -\dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} = \dfrac{(\cos u \sin^2 v, \sin u \sin^2 v, \sin v \cos v)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$

$$\int_{\Sigma_1} < F, \tau > d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv < (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{(\cos u \sin^2 v, \sin u \sin^2 v, \sin v \cos v)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} > |\Phi_u \wedge \Phi_v| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{2\pi} du \cos u \sin^2 v + \sin u \sin^2 v + \sin v \cos v = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv\ \sin v \cos v = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv\ \sin(2v)$$

$$= -\ \frac{\pi}{4}\cos(2v)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Una parametrizzazione di Σ_2 è $\Phi(u,v) = (u,v,0)$ con $u, v \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$
$\Phi_u = (1,0,0) \quad \Phi_v = (0,1,0) \quad \Phi_u \wedge \Phi_v = (0,0,1) \quad \tau = (0,0,-1)$

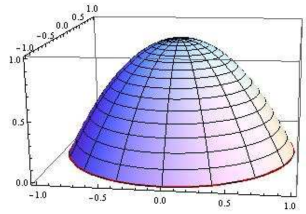
$$\int_{\Sigma_2} < F, \tau > d\sigma = \int_D < (\frac{1}{1+u^2+v^2}, \frac{1}{1+u^2+v^2}, \frac{1}{1+u^2+v^2}), (0,0,-1) > |\Phi_u \wedge \Phi_v| dudv =$$

$$= \int_D \frac{-1}{1+u^2+v^2}dudv = -\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho}{1+\rho^2} = -2\pi\int_0^1 d\rho\frac{\rho}{1+\rho^2} = -\pi\log(1+\rho^2)\Big|_0^1 = -\pi\log 2$$

Quindi $\displaystyle\int_{\partial E} < F, \tau > d\sigma = \int_{\Sigma_1} < F, \tau > d\sigma + \int_{\Sigma_2} < F, \tau > d\sigma = \frac{\pi}{2} - \pi\log 2.$

Abbiamo quindi verificato che $\displaystyle\int_E \text{div } F\, dxdydz = \int_{\partial E} < F, \tau > d\sigma$

7. $\omega = xyzdx + x^3dy - zdz \quad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.



Sia $F(x,y,z) = (xyz, x^3, -z)$ il campo vettoriale associato ad ω, dobbiamo verificare che $\int_\Sigma < \text{ rot } F, \tau > d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} \omega$

Una parametrizzazione di Σ è

$\Phi(u,v) = (u, v, 1-u^2-v^2)$ con $(u,v) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$\Phi_u = (1, 0, -2u)$

$\Phi_v = (0, 1, -2v)$

$\Phi_u \wedge \Phi_v = (2u, 2v, 1)$

$\tau = \dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} = \dfrac{(2u,2v,1)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$.

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^3 & -z \end{vmatrix} = (0, xy, 3x^2 - xz)$$

$$\int_\Sigma < \text{ rot } F, \tau > d\sigma = \int_D (0, uv, 3u^2 - u(1-u^2-v^2)) \frac{(2u,2v,1)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} |\Phi_u \wedge \Phi_v| du dv =$$

$$= \int_D 2uv^2 + 3u^2 - u(1-u^2-v^2) du dv = \int_D 3u^2 du dv = 3 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \; \rho^3 \cos^2\theta =$$

$$= 3\pi \int_0^1 d\rho \; \rho^3 = \frac{3}{4}\pi$$

$\partial^+\Sigma$ è la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$. $\dot{\gamma}\ (t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ quindy

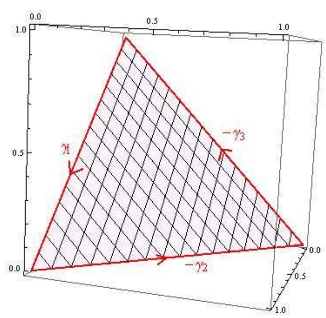
$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_0^{2\pi} < (0, \cos^3 t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) > dt = \int_0^{2\pi} \cos^4 t \; dt = \int_0^{2\pi} \cos t \; \cos^3 t \; dt$$

$$= \sin t \cos^3 t \Big|_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \; dt = 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \; dt = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt =$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{3}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(s) ds = \frac{3}{8} 2\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Quindi il teorema di Stokes è verificato.

8. $\omega = \left(z^3 - y^3\right) dx + \left(x^3 - z^3\right) dy + \left(y^3 - x^3\right) dz$ sul triangolo T di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.



Il triangolo T giace nel piano $x+y+z=1$e più precisamente $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=1-x-y,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$.Una parametrizzazione di T è data da $\Phi(u,v)=(u,v,1-u-v)$ con $(u,v)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$
$\Phi_u=(1,0,-1)\quad \Phi_v=(0,1,-1)\quad \Phi_u\wedge\Phi_v=(1,1,1)\quad \tau=\frac{\Phi_u\wedge\Phi_v}{|\Phi_u\wedge\Phi_v|}=\frac{(1,1,1)}{|\Phi_u\wedge\Phi_v|}$.
$F(x,y,z)=(z^3-y^3,x^3-z^3,y^3-x^3)$

$$\text{rot } F=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^3-y^3 & x^3-z^3 & y^3-x^3\end{vmatrix}=(3y^2+3z^2,3x^2+3z^2,3x^2+3y^2)$$

$$\int_T<\text{ rot } F,\tau>d\sigma=\int_D<(3v^2+3(1-u-v)^2,3u^2+3(1-u-v)^2,3u^2+3v^2),\frac{(1,1,1)}{|\Phi_u\wedge\Phi_v|}>|\Phi_u\wedge\Phi_v|$$

$$=6\int_T u^2+v^2+(1-u-v)^2dudv=6\int_0^1du\int_0^{1-u}dvu^2+v^2+(1-u-v)^2=$$

$$=6\int_0^1du\ \ u^2v+\frac{1}{3}v^3-\frac{1}{3}(1-u-v)^3\Big|_0^{1-u}=6\int_0^1du\ u^2-u^3+\frac{1}{3}(1-u)^3+\frac{1}{3}(1-u)^3=$$

$$=6\int_0^1du\ u^2-u^3+\frac{2}{3}(1-u)^3=6\left(\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4-\frac{1}{6}(1-u)^4\Big|_0^1\right)=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}$$

$\partial^+D=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ dove $\alpha_1(t)=(t,0)\ t\in[0,1]$, $\quad\alpha_2(t)=(t,1-t)\ t\in[0,1]$, $\alpha_3(t)=(0,t)\ t\in[0,1]$ pertanto $\partial^+\Sigma=\Phi(\partial^+D)\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3$ dove
$\gamma_1(t)=\Phi(\alpha_1(t))=(t,0,1-t)\quad t\in[0,1]\quad \dot{\gamma_1}\ (t)=(1,0,-1)$
$\gamma_2(t)=\Phi(\alpha_2(t))=(t,1-t,0)\quad t\in[0,1]\quad \dot{\gamma_2}\ (t)=(1,-1,0)$
$\gamma_3(t)=\Phi(\alpha_3(t))=(0,t,1-t)\quad t\in[0,1]\quad \dot{\gamma_3}\ (t)=(0,1,-1)$

$$\int_{\gamma_1}\omega=\int_0^1dt<((1-t)^3,t^3-(1-t)^3,-t^3),(1,0,-1)>dt\int_0^1(1-t)^3+t^3=-\frac{1}{4}(1-t)^4+\frac{1}{4}t^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma_2}\omega=\int_0^1dt<(-(1-t)^3,t^3,(1-t)^3-t^3),(1,-1,0)>dt=\int_0^1-(1-t)^3-t^3=-\frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma_3}\omega=\int_0^1dt<((1-t)^3-t^3,-(1-t)^3-t^3),(0,1,-1)>dt=\int_0^1-(1-t)^3-t^3=-\frac{1}{2}$$

Dunque $\displaystyle\int_{\partial^+T}\omega=\int_{\gamma_1}\omega-\int_{\gamma_2}\omega-\int_{\gamma_3}\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ e quindi il teorema di stokes è verificato.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

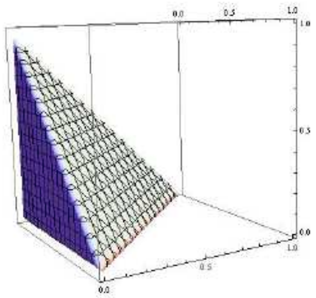
Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 12 (28 Maggio 2010)
Ripasso

1. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ $\quad \displaystyle\int_A e^{x+y+z} dxdydz.$



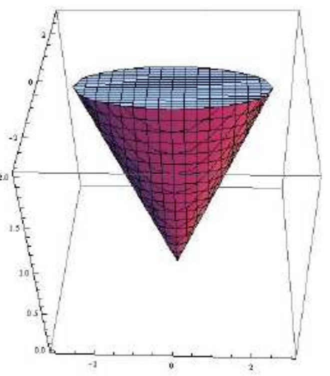
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$
Per il teorema di Fubini abbiamo che

$$\int_A e^{x+y+z} dxdydz = \int_A e^x e^y e^z dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz\ e^x e^y e^z = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\ e^x e^y e^z \Big|_0^{1-x-y}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\ e^x e^y e^{1-x-y} - e^x e^y = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\ e - e^x e^y = \int_0^1 dx\ ey - e^x e^y \Big|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 dx\ e(1-x) - e^x e^{1-x} + e^x = \int_0^1 dx\ e^x - ex = e^x - \frac{e}{2} x^2 \Big|_0^1 = e - \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - 1$$

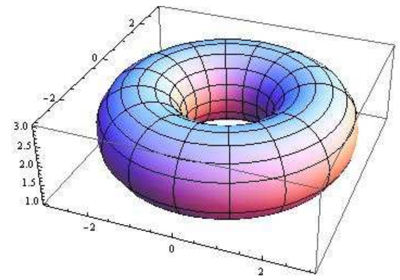
2. $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq \dfrac{z^2}{h^2}, 0 \leq z \leq h\right\}.$



$\forall\ 0 \leq z \leq h$ sia $C_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in C\}$ la sezione di C a quota z. C_z è una ellisse di semiassi $\frac{az}{h}$ e $\frac{bz}{h}$ e quindi $Area(C_z) = \pi ab\frac{z^2}{h^2}$. Dunque per il teorema di Fubini abbiamo che

$$Vol(C) = \int_0^h Area(C_z)dz = \int_0^h \pi ab\frac{z^2}{h^2} = \frac{1}{3}\pi ab\frac{z^3}{h^2}\bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi abh$$

3. Una parametrizzazione di Σ è $\Phi(u,v) = ((\cos v + 2)\cos u, (\cos v + 2)\sin u, \sin v + 2)$ con $u, v \in [0, 2\pi]$.



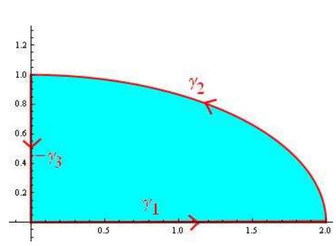
$\Phi_u = (-(\cos v + 2)\sin u, (\cos v + 2)\cos u, 0)$
$\Phi_v = (-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, \cos v)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = ((\cos v + 2)\cos u\cos v, (\cos v + 2)\sin u\cos v, (\cos v + 2)\sin v)$
$|\Phi_u \wedge \Phi_v| = (\cos v + 2)$

$$\int_\Sigma \frac{d\sigma}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} du \frac{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}{(\cos v+2)^2\cos^2 u + (\cos v + 2)^2 \sin^2 u} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} du \frac{1}{2+\cos v}$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} dv \frac{1}{2+\cos v} = 4\pi \int_0^{\pi} dv \frac{1}{2+\cos v} \overset{t=\tan\frac{v}{2}}{=} 4\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt = 8\pi \int_0^\infty \frac{dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{8}{3}\pi \int_0^\infty \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{3}\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{8}{\sqrt{3}}\pi \arctan s\bigg|_0^\infty = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}}$$

4. $\omega = \dfrac{dx}{x^2+4y^2+4} + xy\, dy \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.



Siano $M(x,y) = \frac{1}{x^2+4y^2+4}$ e $N(x,y) = xy$ verifichiamo che $\displaystyle\int_{\partial^+ E} \omega = \int_E \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dxdy$.
Passamdo a coordinate ellittiche $(x,y) = \Phi(\rho,\theta) = (2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ abbiamo $\Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ e $|\det J\Phi| = 2\rho$ quindi per il teorema del cambio di variabile abbiamo

$$\int_E \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dxdy = \int_E y - \frac{-8y}{(x^2+4y^2+4)^2}\, dxdy = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left(\rho\sin\theta + \frac{8\rho\sin\theta}{(4\rho^2+4)^2}\right) |\det J\Phi| d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\ \rho^2 \sin\theta + \frac{1}{2}\frac{\rho^2 \sin\theta}{(\rho^2+1)^2} = 2\int_0^1 d\rho\ -\rho^2\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{\rho^2\cos\theta}{(\rho^2+1)^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\int_0^1 d\rho\ \rho^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2} = \frac{2}{3} + \int_0^1 d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\int_0^1 d\rho\ \rho\frac{-2\rho}{(1+\rho^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{1+\rho^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2}d\rho\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} + \frac{5}{12}$$

$\partial^+ E = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ dove $\gamma_1(t) = (t,0)\ t \in [0,2]$, $\gamma_2(t) = (2\cos t, \sin t)\ t \in [0,2]$ e $\gamma_3(t) = (0,t)\ t \in [0,1]$.

$\gamma_1(t) = (t,0)\ t \in [0,2] \quad \dot{\gamma_1}\ (t) = (1,0)$ quindi

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^2 < (\frac{1}{t^2+4}, 0), (1,0) > dt = \int_0^2 \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dt}{(\frac{t}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{8}$$

$\gamma_2(t) = (2\cos t, \sin t)\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \dot{\gamma_2}\ (t) = (-2\sin t, \cos t)$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} < (\frac{1}{8}, 2\cos t \sin t), (-2\sin t, \cos t) > dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4}\sin t + 2\cos^2 t \sin t\ dt =$$

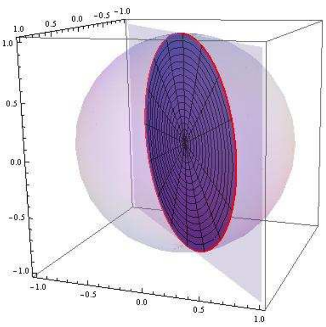
$$= \frac{1}{4}\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

$\gamma_3(t) = (0,t)\ t \in [0,1] \quad \dot{\gamma_3}\ (t) = (0,1)$

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^1 < (\frac{1}{4t^2+4}, 0), (0,1) > dt = 0$$

Dunque $\displaystyle\int_{\partial^+ E} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega = \frac{5}{12} + \frac{\pi}{8}$

5. $\omega = \dfrac{yz}{x+y-1}dx + \dfrac{xz}{x-y+1}dy + \dfrac{xy}{x-y+1}dz \qquad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y = x\}$.



Sia $F(x,y,z) = \left(\dfrac{yz}{x-y+1}, \dfrac{xz}{x-y+1}, \dfrac{xy}{x-y+1}\right)$.

Dobbiamo verificare che $\displaystyle\int_\Sigma <\ \text{rot}\ F, \nu > d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} \omega$.

Una parametrizzazione di Σ è $\Phi(u,v) = (u,u,v)$ con $(u,v) \in D = \{(x,z) \mid 2x^2 + z^2 \leq 1\}$

$\Phi_u = (1, 1, 0)$
$\Phi_v = (0, 0, 1)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (1, -1, 0)$
$\nu = \dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} = \dfrac{(1, -1, 0)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{yz}{x-y+1} & \frac{xz}{x-y+1} & \frac{xy}{x-y+1} \end{vmatrix} = \left(\frac{xy}{(x-y+1)^2}, \frac{xy}{(x-y+1)^2}, -\frac{z(x+y)}{(x-y+1)^2} \right).$$

$$\int_\Sigma < \text{ rot } F, \nu > d\sigma = \int_E < (u^2, u^2, -2uv), (1, -1, 0) > dudv = \int_E 0 \; dudv = 0$$

Una parametrizzazione di $\partial^+ D$ è $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t)$ con $t \in [-\pi, \pi]$ quindi una parametrizzazione di $\partial^+ \Sigma$ è $\gamma(t) = \Phi(\alpha(t)) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t) \quad t \in [-\pi, \pi]$.

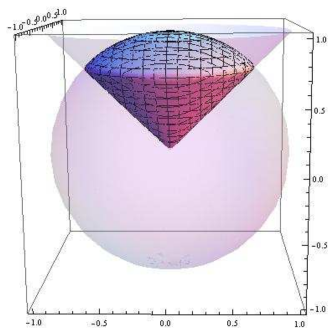
$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} < F(\gamma(t)), \dot{\gamma}\,(t) > dt = \int_{-\pi}^{\pi} < (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \sin t, \frac{1}{2} \cos^2 t), (-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \cos t \sin^2 t - \frac{1}{2} \cos t \sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^3 t \; dt = \int_0^{2\pi} - \cos t \sin^2 t + \frac{1}{2} \cos t (1 - \sin^2 t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos t - \frac{3}{2} \cos t \sin^2 t \; dt = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Quindi $\displaystyle\int_\Sigma < \text{ rot } F, \nu > d\sigma = 0 = \int_{\partial^+\Sigma} \omega$

6. $F(x, y, z) = (xy, yz, xz) \qquad B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$



Dobbiamo verificare che $\displaystyle\int_B \text{div } F \; dxdydx = \int_{\partial B} < F, \nu > d\sigma.$
div $F = y + z + x = x + y + z$. Passando in coordinate sferiche abbiamo che

$$\int_B \text{div } F = \int_B x+y+z \; dxdydz = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \;\; (\rho \sin\varphi \cos\theta + \rho \sin\varphi \sin\theta + \rho \cos\varphi) \, \rho^2 \sin\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \; \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi = \pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \; \rho^3 \sin(2\varphi) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 d\rho \; -\rho^3 \cos(2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 d\rho \; \rho^3 = \frac{\pi}{8}$$

$\partial B = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dove $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \;\; z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ e $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}, \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
Una parametrizzazione di Σ_1 è $\Phi(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$ con $u \in [0, 2\pi]$ e

$v \in [0 \frac{\pi}{4}]$.
$\Phi_u = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0)$
$\Phi_v = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, -\sin v)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\sin v \cos v)$
$\nu = -\dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} = \dfrac{(-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\sin v \cos v)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$
$\displaystyle\int_{\Sigma_1} < F, \nu > d\sigma =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} dv \int_0^{2\pi} du < (\sin^2 v \cos u \sin u, \sin u \sin v \cos v, \cos u \sin v \cos v), \frac{(\cos u \sin^2 v, \sin u \sin^2 v, \sin v \cos v)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} > |\Phi_u \wedge \Phi_v|$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv \int_0^{2\pi} du \ \cos^2 u \sin^4 v \sin u + \sin^2 u \sin^3 v \cos v + \sin^2 v \cos^2 v \cos u =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv - \frac{1}{3} \cos^3 u \sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v \sin u \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv \int_0^{2\pi} du \ \sin^2 u \sin^3 v \cos v =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv \int_0^{2\pi} du \ \sin^3 v \cos v \frac{1 - \cos 2u}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv \sin^3 v \cos v \left(\frac{1}{2} \ u - \frac{1}{4} \sin(2v) \Big|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 v \cos v \ dv = \pi \frac{1}{4} \sin^4 v \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}$$

Una parametrizzazione di Σ_2 è data da $\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$ con $u \in [-\pi, \pi]$ e $v \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$
$\Phi_u = (-v \sin u, v \cos u, 0)$
$\Phi_v = (\cos u, \sin u, 1)$
$\Phi_u \wedge \Phi_v = (v \cos u, v \sin u, -v)$
$\nu = \dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} = \dfrac{(v \cos u, v \sin u, -v)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$

$$\int_{\Sigma_2} < F, \nu > d\sigma = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dv \int_{-\pi}^{\pi} du < (v^2 \cos u \sin u, v^2 \sin u, v^2 \cos u), \frac{(v \cos u, v \sin u, -v)}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|} > |\Phi_u \wedge \Phi_v|$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dv \int_{-\pi}^{\pi} du \ v^3 \cos^2 u \sin u + v^3 \sin^2 u - v^3 \cos u = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dv \int_{-\pi}^{\pi} du \ v^3 \sin^2 u = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dv \ v^3 =$$

$$= \frac{\pi}{4} v^4 \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

Quindi $\displaystyle\int_{\partial B} < F, \nu > d\sigma = \int_{\Sigma_1} < F, \nu > d\sigma + \int_{\Sigma_2} < F, \nu > d\sigma = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 1 (2 Marzo 2011)

Ripasso

1. (a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{2}dx = \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

(b)
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2x)}{4}dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4x)}{8} = \left[\frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

(c)
$$\int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{1-\sin(x)} \overset{(t=\tan\left(\frac{x}{2}\right))}{=} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{2}{(t-1)^2}dt = \left[\frac{2}{1-t}\right]_{-\infty}^0 = 2$$

(d)
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}dx \overset{(y=\sin(x))}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1-y^2} = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{1-y}}{2} + \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{y+1}}{2} =$$
$$= \frac{[-\log|1-y|]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{[\log|y+1|]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)-\log\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)-\log\left(\frac{1}{2}\right)}{2} =$$
$$= \log(3) - \log(2) - (\log(1) - \log(2)) = \log(3)$$

(e)
$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(-2xe^{-x^2}\right)dx = \left[-\frac{x^2e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2} =$$
$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} = \left[\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

(f)
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx = \left[e^{-x}\sin(x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\sin(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x) =$$
$$\left[-e^{-x}\cos(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\left(-e^{-x}\right)\cos(x)dx = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx = \frac{1}{2}$$

(g)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-x} = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{\log|x+1|}{2} + \frac{\log|x-1|}{2} - \log|x| \right]_2^{+\infty} =$$

$$\left[\log\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} \right) \right]_2^{+\infty} = \log\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

(h)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+4e^{-x}-2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+4} \overset{(y=e^x)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2-2y+4} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(y-1)\right)^2+1} dy = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(y-1) \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

   (a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \le 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x, y \le 1\right\}$
   è il cubo centrato nell'origine di lato 2:

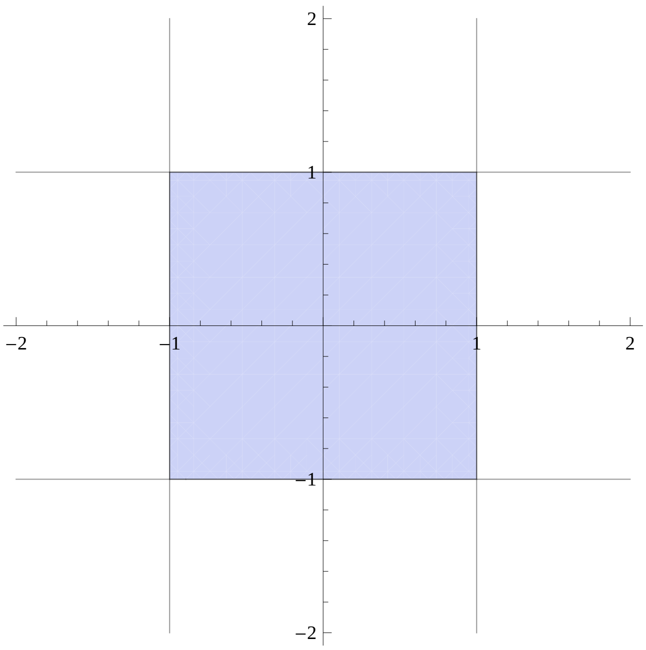


Figure 1: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \le 1\right\}$

   (b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le x\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 1\right\}$
   è la circonferenza centrata in $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ di raggio $\frac{1}{2}$:

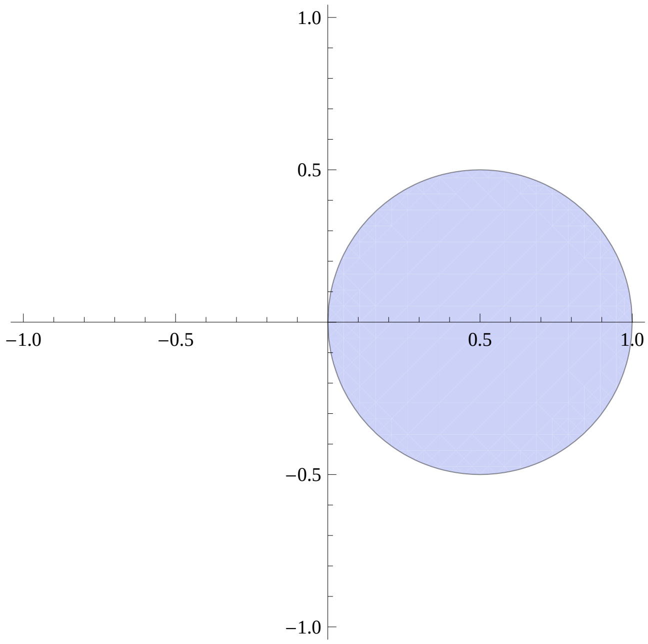


Figure 2: $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\right\}$

(c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 \leq \dfrac{y^2}{3}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \left(y + \sqrt{3}x\right)\left(y - \sqrt{3}x\right) \geq \geq 0\right\}$ è la porzione della circonferenza unitaria delimitata dalle rette di equazione $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$:

(d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 4 - x^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\right\}$ è la regione di piano delimitata dalle rette verticali $x = 1$ e $x = -1$ e dalle parabole $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$:

3. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

(a) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ è la regione di spazio delimitata dalla sfera centrata nell'origine di raggio 2 e il cilindro di raggio 1 avente come asse l'asse z:

(b) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}\right\}$ è la regione di piano compresa tra il piano xy e il grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$:

(c) $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, |z| \leq 1\right\}$ è la porzione del cono avente vertice nell'origine, asse verticale e angolo d'apertura $\dfrac{\pi}{4}$ delimitata dai piani orizzontali $z = 1$ e $z = -1$:

(d) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\right\}$ è l'ottaedro ottenuto attraverso simmetrie rispetto a uno o più assi cartesiani a partire dalla regione del primo quadrante delimitata dal piano $x + y + z = 1$:

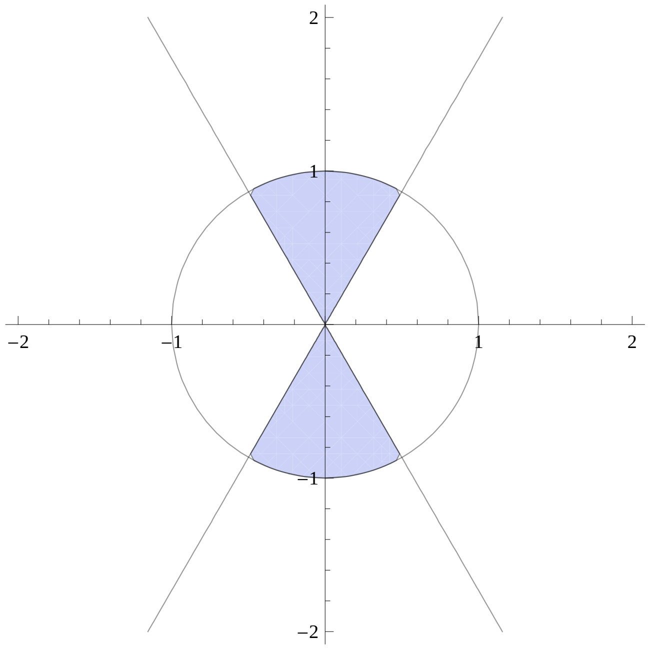


Figure 3: $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 \leq \dfrac{y^2}{3}\right\}$

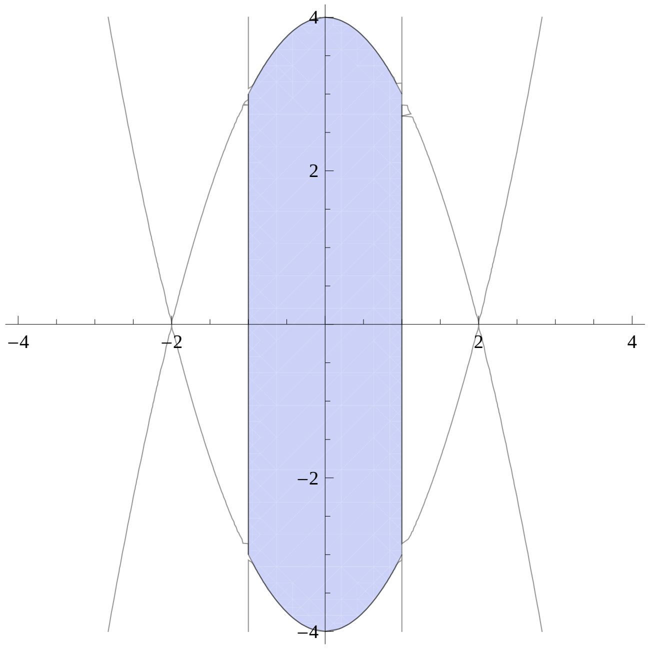


Figure 4: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 4 - x^2\right\}$

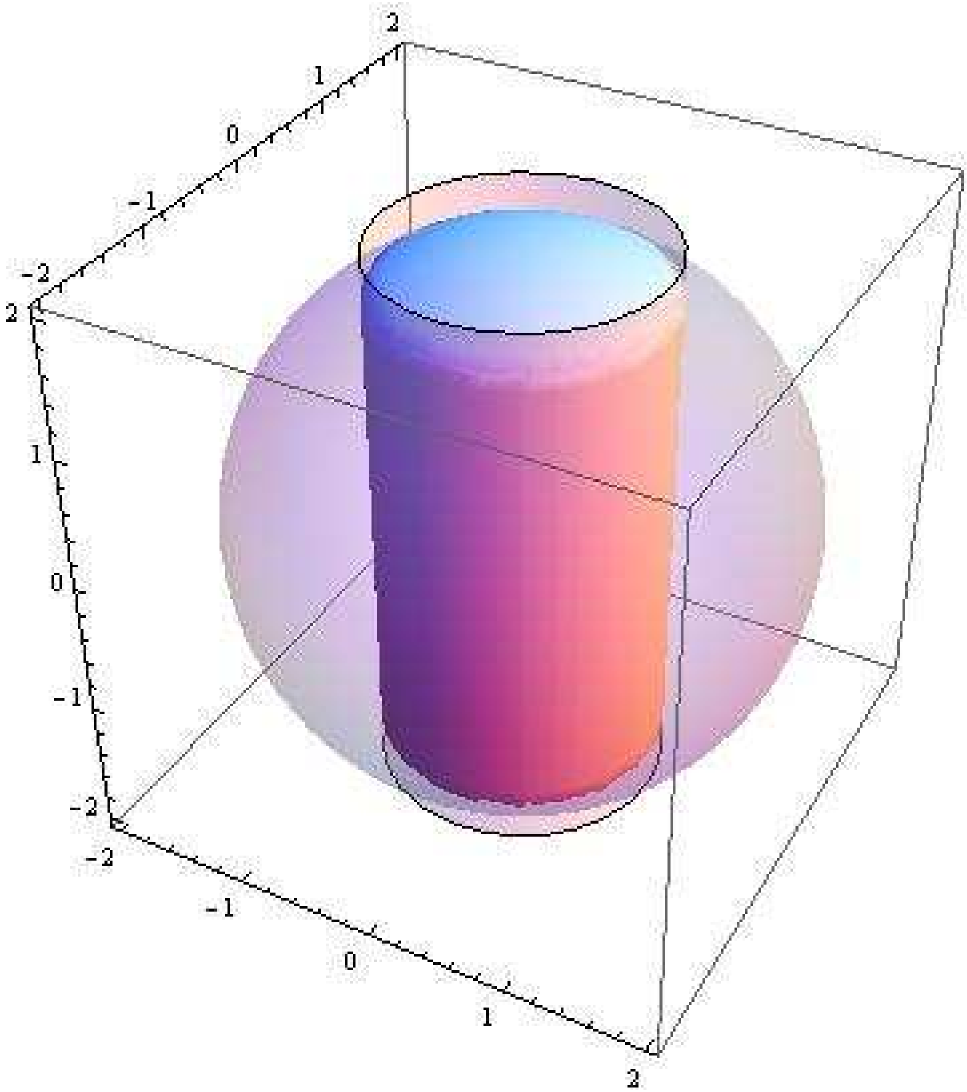


Figure 5: $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x^2 + y^2 \le 1\right\}$

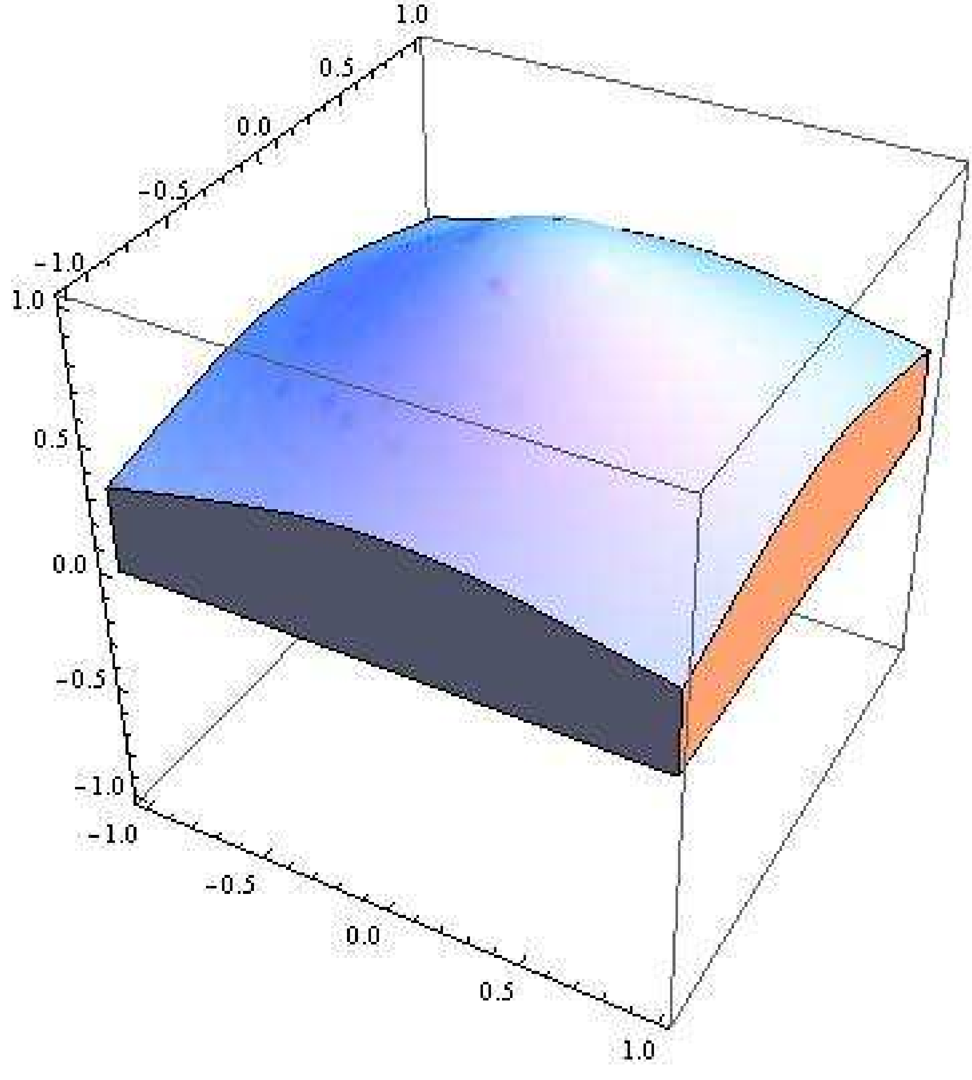


Figure 6: $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1} \right\}$

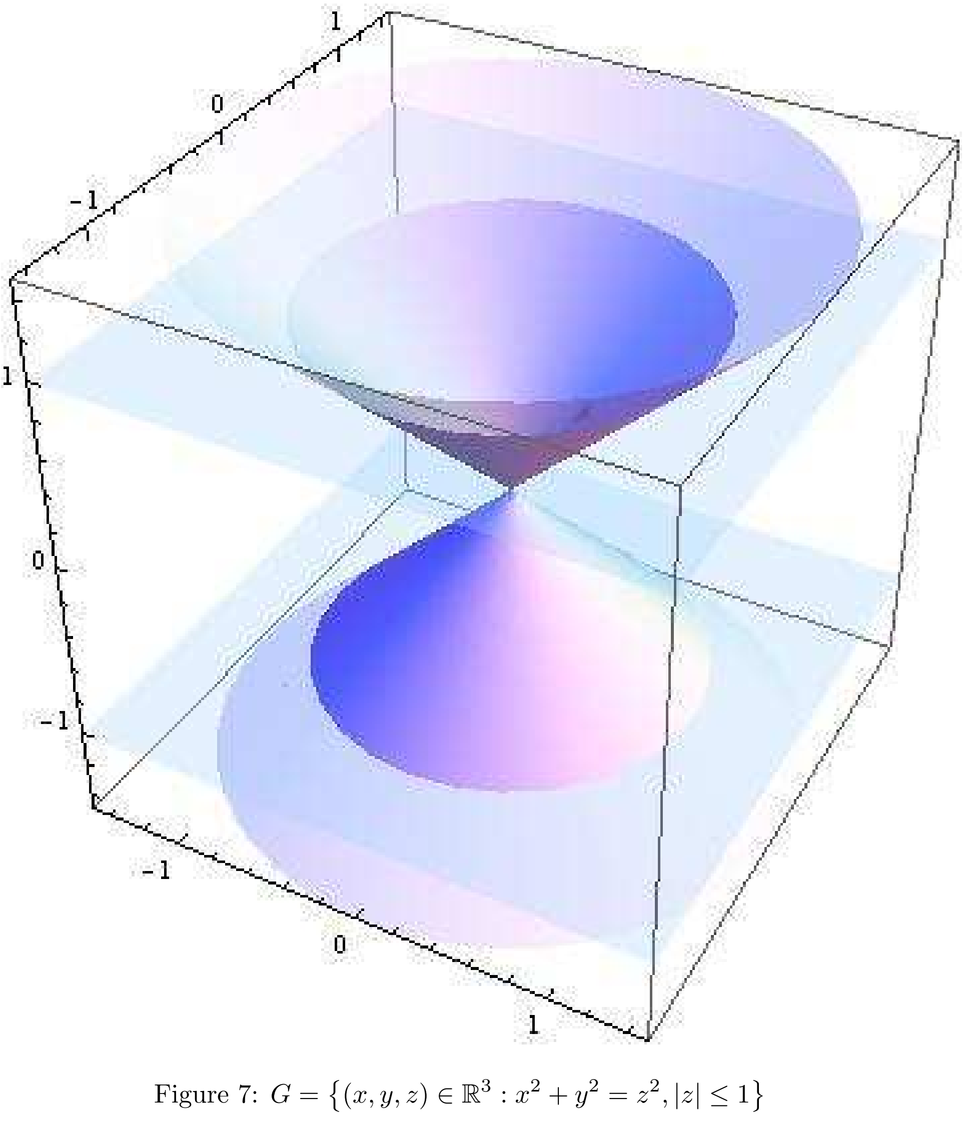


Figure 7: $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2, |z| \le 1\right\}$

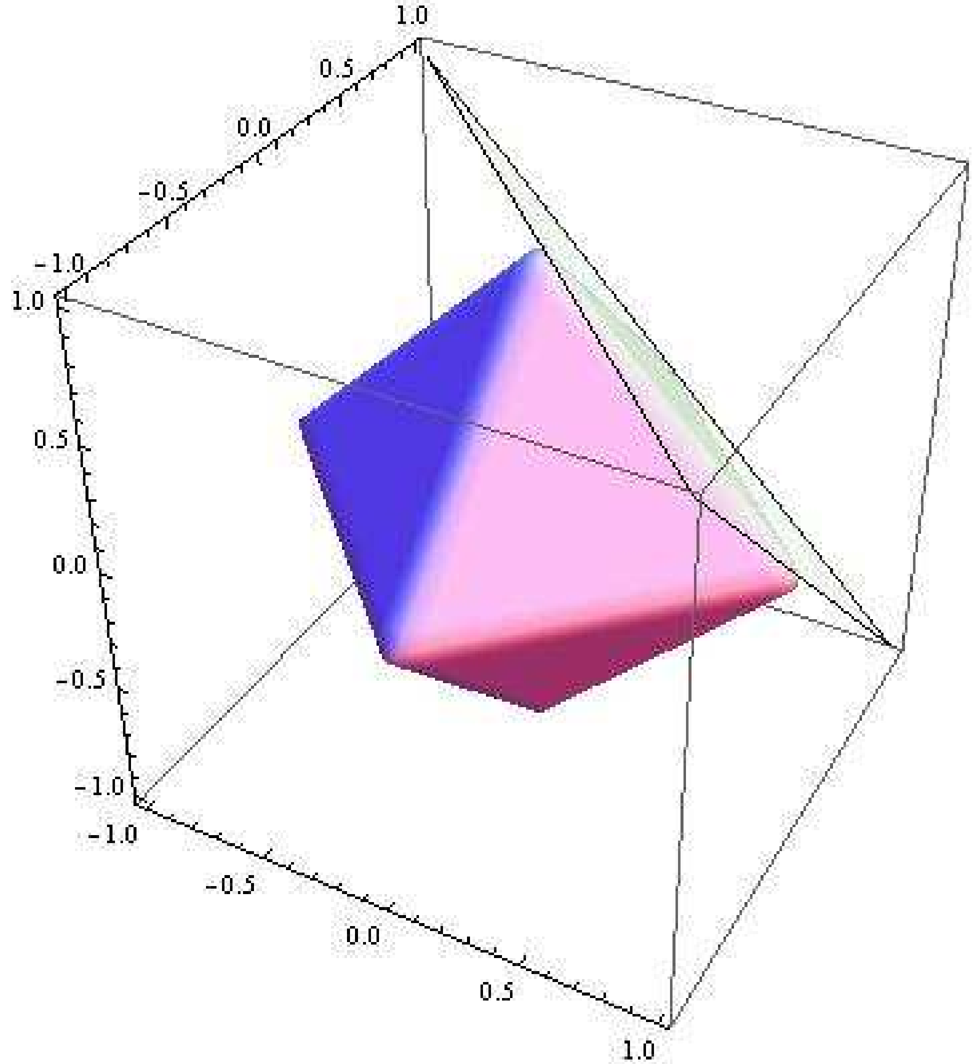


Figure 8: $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\right\}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (9 Marzo 2011)

Spazi normati

1. $f_n(x) = xe^{-nx} \in C([0,1])$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 xe^{-nx}dx = \left[x\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-e^{-nx}}{n}dx = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx =$$

$$= -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2} = \frac{1-(n+1)e^{-n}}{n^2}$$

Dunque, $\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, cioè $f \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ rispetto a $\|\cdot\|_1$.

2. $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}\sin x \overset{n\to+\infty}{\to} f(x) := \sin x \;\forall x \in [0,\pi]$ (Convergenza puntuale).
La convergenza é anche rispetto a $\|\cdot\|_1$ perché

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^\pi \left|1 - e^{-\frac{x^2}{n}}\right| |\sin x|dx \le \left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{n}}\right)\int_0^\pi |\sin x|dx \le \pi\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{n}}\right) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

3. $x_n(k) = \dfrac{n}{n(k^2+1)+1} \overset{n\to+\infty}{\to} x(k) = \dfrac{1}{k^2+1} \;\forall k \in \mathbb{N}$.
La convergenza è anche in ℓ_1 perché

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{n}{n(k^2+1)+1} - \frac{1}{k^2+1}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n(k^2+1)+1)(k^2+1)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k^2+1)^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

4. $x_n(k) = \dfrac{1}{n^3}\cos^k\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$$\|x_n\|_1 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\cos^k\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cos^k\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2} = \frac{1}{n^3}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\cos^2\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^k} = \frac{1}{n^3\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}}$$

Dunque,

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\frac{1}{n^4}}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)} \overset{(t=\frac{1}{n^2})}{=} \lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{t^2}{1-\cos t} = +\infty$$

e quindi x_n non converge in ℓ_1, mentre

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}\sqrt{\frac{\frac{1}{n^4}}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}} \overset{(t=\frac{1}{n^2})}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{t}{1+\cos t}}\sqrt{\frac{t^2}{1-\cos t}} = 0$$

pertanto $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ in ℓ_2.

5. (a)

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b-a)\|f\|_\infty \quad \forall f \in C([a,b])$$

(b) $f_n(x) = (1-nx)\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$

$$\|f_n\|_\infty = f_n(0) = 1$$

mentre

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)dx = \left[x - \frac{n}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n}$$

Da ciò si deduce che le due norme non possono essere equivalenti: infatti, se esistesse C' tale che

$$C'\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \; \forall f \in C([0,1])$$

allora in particolare si avrebbe

$$C'\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_1 \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

e dunque $\|f_n\|_\infty \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, che è assurdo.

(c) $g_n(x) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$

$$\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

mentre

$$\|g_n\|_1 = \int_0^n \frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)dx = \frac{1}{n}\left[n - \frac{x^2}{2n}\right]_0^n = \frac{1}{2}$$

dunque, analogamente a prima, se continuasse a valere la disuguaglianza precedente, si avrebbe

$$\|g_n\|_1 \leq C\|g_n\|_\infty \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

che è assurdo.

6.

$$\|x\|_\infty^2 = x_k^2 \text{ per qualche } k \in \{1,\dots,n\} \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|_2^2 \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

mentre

$$\|x\|_2^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \|x\|_\infty^2 + \dots + \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Le costanti $A=1$ e $B=\sqrt{n}$ sono ottimali perché

$$x=(1,0,\dots,0)\Rightarrow\|x\|_\infty=\|x\|_2$$

e

$$x=(1,1,\dots,1)\Rightarrow\|x\|_2=\sqrt{n}=\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

dunque, se $A'>1$, il vettore $x=(1,0,\dots,0)$ non soddisferebbe

$$A'\|x\|_\infty\le\|x\|_2$$

mentre, se $B'<\sqrt{n}$, per $x=(1,1,\dots,1)$ non varrebbe la condizione

$$\|x\|_2\le B'\|x\|_\infty$$

7. (a)

$$\|f\|_{C^m([-1,1])}:=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty+\dots+\left\|f^{(m)}\right\|_\infty$$

$\|f\|_{C^m([-1,1])}\ge 0$ perché $\|f\|_\infty:=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|\ge 0$ e $\left\|f^{(j)}\right\|_\infty:=\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|f^{(j)}(x)\right|\ge 0\ \forall j\in\{1,\dots$

$\|f\|_{C^m([-1,1])}=0\Rightarrow 0=\|f\|_\infty:=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|\Rightarrow f(x)\equiv 0\ \forall x\in[-1,1]$

$\|\lambda f\|_{C^m([-1,1])}=\|\lambda f\|_\infty+\|\lambda f'\|_\infty+\dots+\left\|\lambda f^{(m)}\right\|_\infty=\lambda\|f\|_\infty+\lambda\|f'\|_\infty+\dots+\lambda\left\|f^{(m)}\right\|_\infty=\lambda\|f\|_{C^m}$

$\|f+g\|_{C^m([-1,1])}:=\|f+g\|_\infty+\|f'+g'\|_\infty+\dots+\left\|f^{(k)}+g^{(k)}\right\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+\|f'\|_\infty+\|g'\|_\infty+\cdots$

$$+\left\|f^{(m)}\right\|_\infty+\left\|g^{(m)}\right\|_\infty=\|f\|_{C^m([-1,1])}+\|g\|_{C^m([-1,1])}$$

Dunque, $\|f\|_{C^m([-1,1])}$ è una norma su $C^k([-1,1])\ \forall m\le k$.

(b) Mostro che $\left(C^1([-1,1]),\|\cdot\|_{C^1([-1,1])}\right)$ è completo: se $f_n\in C^1([-1,1])$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{C^1([-1,1])}$, allora

$$\|f_n-f_m\|_\infty\overset{n,m\to+\infty}{\to}0\quad\text{e}\quad\|f_n'-f_m'\|_\infty\overset{n,m\to+\infty}{\to}0$$

dunque f_n e f_n' sono due successioni in $C([-1,1])$ di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ e quindi, essendo quest'ultimo spazio completo,

$$f_n\overset{n\to+\infty}{\to}f\quad\text{e}\quad f_n'\overset{n\to+\infty}{\to}g\quad\text{rispetto a}\quad\|\cdot\|_\infty$$

inoltre

$$f(x)\overset{n\to+\infty}{\leftarrow}f_n(x)=f(0)+\int_0^x f_n'(t)dt\overset{n\to+\infty}{\to}f(0)+\int_0^x g(t)dt\quad\forall x\in[-1,1]$$

dunque, derivando entrambi i membri si ottiene che $f'=g$ e dunque

$$f_n\overset{n\to+\infty}{\to}f\quad\text{rispetto a}\quad\|\cdot\|_{C^1([-1,1])}$$

Suppongo ora che $\left(C^k([-1,1]),\|\cdot\|_{C^k([-1,1])}\right)$ sia completo e mostro che lo è anche $\left(C^{k+1}([-1,1]),\|\cdot\|_{C^{k+1}([-1,1])}\right)$: se f_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{C^{k+1}([-1,1])}$, allora

$$\|f_n-f_m\|_\infty\overset{n,m\to+\infty}{\to}0\quad\text{e}\quad\left\|f_n^{(j)}-f_m^{(j)}\right\|_\infty\overset{n,m\to+\infty}{\to}0\quad\forall j\in\{1,\dots,k+1\}$$

dunque in particolare f_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{C^k([-1,1])}$ mentre $f^{(k+1)}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ e quindi, per ipotesi induttiva e per la completezza di $(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$,

$$f_n \overset{n\to+\infty}{\to} f \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{C^k([-1,1])} \quad \text{e} \quad f_n^{(k+1)} \overset{n\to+\infty}{\to} g \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_\infty$$

dunque, analogamente a prima,

$$f^{(k)}(x) \overset{n\to+\infty}{\leftarrow} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(0) + \int_0^x f_n^{(k+1)}(t)dt \overset{n\to+\infty}{\to} f^{(k)}(0) + \int_0^x g(t)dt \quad \forall x \in [-1,1]$$

pertanto $f^{(k+1)} = g$ e dunque

$$f_n \overset{n\to+\infty}{\to} f \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{C^{k+1}([-1,1])}$$

(c) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ perché converge a $f(x) := |x|$, infatti

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right| = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[-1,1]} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

tuttavia, non converge in $C^k([-1,1])$ per alcun $k \geq 1$ perché il suo limite rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ è $f(x) = |x| \notin C^k([-1,1])$ per nessun $k \geq 1$. Dunque, $\left(C^k([-1,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$ non è completo, perché non tutte le successioni di Cauchy convergono.

(d) Fissato m e costruisco, a partire dalle successioni f_n e f del punto precedente, $g_n \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$ e $g \in C^m([-1,1]) \backslash C^{m+1}([-1,1])$ tale che $g_n \overset{n\to+\infty}{\to} g$ rispetto a $\|\cdot\|_{C^m([-1,1])}$: in questo modo, $\forall k \in \mathbb{N}$ ho una successione di elementi di $C^k([-1,1])$ di Cauchy il cui limite non appartiene a $C^{m+1}([-1,1])$, e dunque a nessun $C^k([-1,1])$ se $k > m$, pertanto ho dimostrato che $\left(C^k([-1,1]), \|\cdot\|_{C^m([-1,1])}\right)$ non è completo. È sufficiente prendere

$$g_n(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} f_n(x_m)dx_m = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} \sqrt{x_m^2 + \frac{1}{n}} dx_m$$

$$g(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} f(x_m)dx_m = \frac{x^m|x|}{(m+1)!}$$

Chiaramente $g_n \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$, perché $g_n^{(m)} = f_n \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$, mentre $g \in C^m([-1,1]) \backslash C^{m+1}([-1,1])$ perché $g^{(m)} = |x|$ non è derivabile; infine, $g_n \overset{n\to+\infty}{\to} g$ rispetto a $\|\cdot\|_{C^m[-1,1]}$ perché

$$\left\| g_n^{(j)} - g^{(j)} \right\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \int_0^x dx_{j+1} \ldots \int_0^{x_{m-1}} (f_n(x_m) - f(x_m))dx_m \right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^1 dx_{j+1} \ldots \int_{-1}^1 \|f_n(x_m) - f(x_m)\|_\infty dx_m = 2^{m-j} \|f_n(x_m) - f(x_m)\|_\infty \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall j \in \{0, \ldots, m\}$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 3 (16 Marzo 2011)

Teorema delle contrazioni

1.
$$(\Phi f)(x) = \int_0^1 f(t)\arctan\left(x^2t^2\right)dt$$

Φ è una contrazione su $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ perché

$$|(\Phi f)(x)-(\Phi g)(x)| = \left|\int_0^1 (f(t)-g(t))\arctan\left(x^2t^2\right)dt\right| \le \int_0^1 |f(t)-g(t)|\left|\arctan\left(x^2t^2\right)\right|dt \le$$

$$\le \int_0^1 \|f-g\|_\infty \frac{\pi}{4}dt = \frac{\pi}{4}\|f-g\|_\infty \ \forall x\in[0,1]$$

quindi

$$\|(\Phi f)(x)-(\Phi g)(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| \le \frac{\pi}{4}\|f-g\|_\infty$$

Dunque, per il teorema delle contrazioni, Φ ha un unico punto fisso, che è, come si verifica immediatamente, la funzione identicamente nulla $f(x)\equiv 0\ \forall x\in[0,1]$

2.
$$(\Phi f)(x) = 1 + \int_0^x tf(t)dt$$

(a) $X = \{f\in C([0,1]) : 0\le f(x)\le 2\ \forall x\in[0,1]\}$ è un sottoinsieme chiuso di $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ perché contiene i limiti di tutte le sue sottosuccessioni convergenti; infatti, se $X\ni f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, allora $0\le f_n(x)\le 2$

(b) $\Phi(X)\subset X$ perché

$$0\le f(x)\le 2\ \forall x\in[0,1] \Rightarrow 1\le(\Phi f)(x)\le 1+\int_0^x 2tdt = 1+x^2\le 2\ \forall x\in[0,1]$$

Φ è una contrazione perché

$$|(\Phi f)(x)-(\Phi g)(x)| = \left|\int_0^x t(f(t)-g(t))dt\right| \le \int_0^x t\|f-g\|_\infty dt = \frac{x^2}{2}\|f-g\|_\infty \le$$

$$\le \frac{\|f-g\|_\infty}{2}\ \forall x\in[0,1] \Rightarrow \|(\Phi f)-(\Phi g)\|_\infty \le \frac{\|f-g\|_\infty}{2}$$

(c) Essendo Φ una contrazione, ha un'unico punto fisso $f\in X$, che è tale che $f(x) = 1+\int_0^x tf(t)dt$; derivando entrambi i membri e calcolando in $x=0$ si ottiene che $\begin{cases} f'(x)=xf(x) \\ f(0)=1 \end{cases}$, e dunque si può trovare f per separazione di variabili:

$$f'(x)=xf(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=x \Rightarrow \log|f(x)|=\int_1^{f(x)}\frac{dy}{y} \overset{(y=f(t))}{=} \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)|=e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f(x)=\pm e^{\frac{x^2}{2}}$$

ma poiché f(0)=1, si può togliere il segno $\pm$ e concludere che $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$.

3.
$$(\Phi x)(k)=e^{-\frac{k+2}{k+1}}x^2(k)$$

(a) Φ è una contrazione su $B=\{x\in\ell_1:\|x\|_1\le 1\}$ perché

$$\|(\Phi x)-(\Phi y)\|_1=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\frac{k+2}{k+1}}\left|x^2(k)-y^2(k)\right|=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\frac{1}{k+1}}|x(k)-y(k)||x(k)+y(k)|\le$$

$$\le\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-y(k)|(|x(k)|+|y(k)|)\le\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-y(k)|\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)|+\sum_{k=0}^{+\infty}|y(k)|\right)\le\frac{2}{e}\|x-y\|_1$$

(b) Φ non è una contrazione su ℓ_1 perché ha più di un punto fisso, infatti:

$$x(k)=(\Phi x)(k)=e^{-\frac{k+2}{k+1}}x^2(k)\iff 0=e^{-\frac{k+2}{k+1}}x^2(k)-x(k)=x(k)\left(e^{-\frac{k+2}{k+1}}x(k)-1\right)\iff$$

$$\iff\begin{cases} x(k)=0 \\ \text{oppure} \\ x(k)=e^{\frac{k+2}{k+1}} \end{cases}$$

Affinché $x\in\ell_1$, è possibile scegliere $x(k)=e^{\frac{k+2}{k+1}}$ soltanto per finiti valori di k, ma in ogni caso c'è più di un punto fisso, addirittura infiniti.

4.
$$(\Phi_a x)(0)=0 \quad \text{e} \quad (\Phi_a x)(k)=\sum_{j=1}^{k}a^j x(j) \text{ se } k\ge 1$$

(a) Se $a<1$ allora $\Phi_a(\ell_\infty)\subset\ell_\infty$ perché

$$\|(\Phi_a x)\|_\infty=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{k}a^j x(j)\right|\le\sum_{j=1}^{\infty}a^j\|x\|_\infty=\frac{a}{1-a}\|x\|_\infty$$

Viceversa, se $a\ge 1$, $\Phi_a(\ell_\infty)\not\subset\ell_\infty$ perché

$$x(k)=1\ \forall k\in\mathbb{N}\in\ell_\infty \quad\Rightarrow\quad (\Phi_a x)(k)=\sum_{j=1}^{k}a^j\begin{cases}\frac{a^{k+1}-a}{a-1} & \text{se } a>1 \\ k & \text{se } a=1\end{cases}\notin\ell_\infty$$

(b) Se $a < \dfrac{1}{2}$ allora Φ_a è una contrazione su $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ perché

$$\|(\Phi_a x)-(\Phi_a y)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{k} a^j (x(j)-y(j))\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} a^j \|x-y\|_\infty = \frac{a}{1-a}\|x-y\|_\infty$$

con $\dfrac{a}{1-a} = \dfrac{1}{1-a} - 1 < \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ se $a < \dfrac{1}{2}$. Viceversa, se $a \ge \dfrac{1}{2}$, Φ_a non è una contrazione perché

$$x(k) = 1, y(k) = 0\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \|(\Phi_a x)-(\Phi_a y)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{k} a^j\right| = \sum_{j=1}^{+\infty} a^j = \frac{a}{1-a} \ge 1 = \|x-y\|_\infty$$

5.
$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = \frac{3}{x_{n-1}+2} \end{cases}$$

$\Phi(x) = \dfrac{3}{x+2} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è una contrazione perché

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| \le \sup_{t\in[0,+\infty)} |\Phi'(t)||x-y| = \sup_{t\in[0,+\infty)}\left|-\frac{3}{(t+2)^2}\right||x-y| = \frac{3}{4}|x-y|$$

Dunque, Φ ha un unico punto fisso dato dal limite della successione definita come $x_n = \Phi(x_{n-1})$ per qualsiasi scelta di $x_0 \in [0, +\infty)$; ma questa è proprio la successioe data, quindi il suo limite è l'unica soluzione non negativa dell'equazione $x = \Phi(x) = \dfrac{3}{x+2} \iff 0 = x(x+2) - 3 = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.
Pertanto, $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} 1\ \forall c \ge 0$.

6. $x = \log\left(x^2+3\right)$ ha un'unica soluzione positiva perché $\Phi(x) = \log\left(x^2+3\right)$ è una contrazione su $[0, +\infty)$, infatti

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| \le \sup_{t\in[0,+\infty)} |\Phi'(t)||x-y| = \sup_{t\in[0,+\infty)}\left|\frac{2t}{t^2+3}\right||x-y| \le \frac{\sqrt{3}}{3}|x-y|$$

perché

$$\Phi''(t) = \frac{6-2t^2}{\left(t^2+3\right)^3} = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \sup_{t\in[0,+\infty)}|\Phi'(t)| = \left|\Phi\left(\pm\sqrt{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dunque Φ ha un unico punto fisso su $[0, +\infty)$, cioè $\exists! x \ge 0$ tale che $x = \log\left(x^2+3\right)$, e chiaramente $x \ne 0$ perché $0(0) = \log 3$, pertanto l'equazione ha un'unica soluzione positiva.

7. (a) $|\sin x| = \left|\displaystyle\int_0^x \cos t dt\right| \le \displaystyle\int_0^{|x|} |\cos t| dt \le \displaystyle\int_0^{|x|} dt = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   (b) $|1-\cos x| = \left|\displaystyle\int_0^x \sin t dt\right| \le \displaystyle\int_0^{|x|} |\sin t| dt \le \displaystyle\int_0^{|x|} t dt = \dfrac{x^2}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) $|\tan x| = \dfrac{|\sin x|}{|\cos x|} \le \dfrac{|x|}{|\cos x|} \le \dfrac{|x|}{\cos 1} \le \dfrac{|x|}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2|x|$ se $|x| \le 1$, perché $|x| \le 1$ $|\cos x| \ge \cos 1 \ge \cos\dfrac{\pi}{3}$.

(d) $|\arctan x| = \left|\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+1}\right| \le \displaystyle\int_0^{|x|} \frac{dt}{t^2+1} \le \displaystyle\int_0^{|x|} dt = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $|e^x - 1| = \left|\displaystyle\int_0^x e^t dt\right| \le \displaystyle\int_0^{|x|} e^{|x|} dt \le \displaystyle\int_0^{|x|} e dt = e|x| \le 3|x|$ se $|x| \le 1$.

(f) $|\sinh x| = \left|\dfrac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{2}\right| \le \dfrac{|e^x - 1| + |e^{-x} - 1|}{2} \le \dfrac{3|x| + 3|x|}{2} = 3|x|$ se $|x| \le 1$.

(g) $|\cosh x - 1| = \dfrac{e^x - 1 + e^{-x} - 1}{2} \le \dfrac{|e^x - 1| + |e^{-x} - 1|}{2} \le 3|x|$ se $|x| \le 1$.

(h) $|\log(x+1)| = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t+1} \le \displaystyle\int_0^{|x|} \frac{dt}{1 - \frac{1}{2}} = 2|x|$ se $|x| \le \dfrac{1}{2}$.

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 4 (23 Marzo 2011)

Teorema della funzione implicita

1.

$$F(x,y) = \sin(xy) - \cos(x) + e^y$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno dell'origine, inoltre $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = [x\cos(xy) + e^y]_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(0), B_\rho(0))$ tali che $F(x,g(x)) \equiv 0 \;\forall x \in B_r(0)$

(b) Supponendo $r, \rho \leq 1$, si ha

$$|F(x,0)| = |1 - \cos(x)| \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{r^2}{2} \leq \frac{r}{2}$$

dunque, posto $T = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = 1$, per avere $\sup_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{r}{2} \leq \frac{\rho}{2\|T\|} = \frac{\rho}{2}$ è sufficiente porre $r = \rho$; inoltre,

$$\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = |1 - x\cos(xy) - e^y| \leq |1 - e^y| + |x\cos(xy)| \leq 3|y| + |x| \leq 3\rho + r \leq 4\rho$$

dunque per avere $\sup_{(x,y) \in B_r(0) \times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq 4\rho \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{1}{8}$, e di conseguenza $r = \frac{1}{8}$.

(c) Essendo $\sin(xg(x)) - \cos(x) + e^{g(x)} \equiv 0 \;\forall x \in B_r(0)$, allora

$$0 = \left[\frac{d}{dx}\left(\sin(xg(x)) - \cos(x) + e^{g(x)}\right)\right]_{x=0} = [(xg'(x) + g(x))\cos(xg(x)) + \sin(x) +$$

$$+ g'(x)e^{g(x)}\Big]_{x=0} = g(0) + g'(0)e^{g(0)} = g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin(xg(x)) - \cos(x) + e^{g(x)}\right)\right]_{x=0} = [(xg''(x) + 2g'(x))\cos(xg(x)) -$$

$$-(xg'(x) + g(x))^2\sin(xg(x)) + \cos(x) + \left(g''(x) + g'(x)^2\right)e^{g(x)}\Big]_{x=0} = 2g'(0) + 1 +$$

$$+ \left(g''(0) + g'(0)^2\right)e^{g(0)} = 1 + g''(0) \Rightarrow g''(0) = -1$$

dunque lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g è

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

2.
$$F(x_1,x_2,y)=\arctan(x_1x_2y)+\log\left(\frac{\cos(x_1+x_2)}{y}\right)$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno di $(0,0,1)$, inoltre $F(0,0,1)=0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)=\left[\dfrac{x_1x_2}{x_1^2x_2^2y^2+1}-\dfrac{1}{y}\right]_{(x_1,x_2,y)=(0,0,1)}=-1$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r,\rho>0, g\in C^2(B_r((0,0)),B_\rho(1))$ tali che $F(x_1,x_2,g(x_1,x_2))\equiv 0\ \forall x\in B_r((0,0))$.

(b) Supponendo $r,\rho\le\dfrac{1}{2}$, si ha $-1\le x_1+x_2\le 1\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\le\cos(1)\le\cos(x_1+x_2)\le 1$, quindi

$$|F(x_1,x_2,1)|=|\arctan(x_1x_2)+\log(\cos(x_1+x_2))|\le|\arctan(x_1x_2)|+|\log(\cos(x_1+x_2))|\le$$

$$\le|x_1x_2|+2|\cos(x_1+x_2)-1|\le\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+(x_1+x_2)^2\le\frac{r^2}{2}+4r^2\le\frac{9}{2}r$$

pertanto, posto $T=\dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)}=-1$, per avere $\displaystyle\sup_{x\in B_r((0,0))}|F(x_1,x_2,0)|\le\frac{9}{2}r\le\frac{\rho}{2\|T\|}=\frac{\rho}{2}$ è sufficiente prendere $r=\dfrac{\rho}{9}$; inoltre,

$$\left|1-T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y)\right|=\left|1+\frac{x_1x_2}{x_1^2x_2^2y^2+1}-\frac{1}{y}\right|\le\frac{|x_1x_2|}{x_1^2x_2^2y^2+1}+\left|1-\frac{1}{y}\right|\le|x_1x_2|+\left|\frac{y-1}{y}\right|\le$$

$$\le\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\frac{|y-1|}{\frac{1}{2}}\le\frac{r^2}{2}+2\rho\le\frac{r}{2}+2\rho\le\frac{13}{2}\rho$$

dunque per avere $\displaystyle\sup_{(x,y)\in B_r(0,0)\times B_\rho(1)}\left|1-T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y)\right|=\frac{13}{2}\rho\le\frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho=\dfrac{1}{13}$ e, di conseguenza, $r=\dfrac{1}{117}$.

(c) Essendo $\arctan(x_1x_2g(x_1,x_2))+\log\left(\dfrac{\cos(x_1+x_2)}{g_1(x_1,x_2)}\right)\equiv 0\ \forall x\in B_r((0,0))$, allora

$$0=\left[\frac{d}{dx_1}\left(\arctan(x_1x_2g(x_1,x_2))+\log\left(\frac{\cos(x_1+x_2)}{g_1(x_1,x_2)}\right)\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$$

$$=\left[\frac{x_2g(x_1,x_2)+x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1}-\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)}-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{g(x_1,x_2)}\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$$

$$=-\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0)\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0)=0$$

analogamente

$$0=\left[\frac{d}{dx_2}\left(\arctan(x_1x_2g(x_1,x_2))+\log\left(\frac{\cos(x_1+x_2)}{g_1(x_1,x_2)}\right)\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$$

$$=\left[\frac{x_1g(x_1,x_2)+x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1}-\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)}-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{g(x_1,x_2)}\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)}=$$

$$= -\frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 0$$

$$0 = \left[\frac{d^2}{dx_1^2}\left(\arctan(x_1x_2g(x_1,x_2)) + \log\left(\frac{\cos(x_1+x_2)}{g_1(x_1,x_2)}\right)\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \left[\frac{2x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)}{x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1} - \right.$$

$$-\frac{2x_1x_2g(x_1,x_2)\left(x_2g(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)^2}{\left(x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1\right)^2} - \frac{1}{\cos^2(x_1+x_2)} -$$

$$\left. -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)g(x_1,x_2) - \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)^2}{g(x_1,x_2)^2}\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} = -1 - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = -1$$

$$0 = \left[\frac{d^2}{dx_1dx_2}\left(\arctan(x_1x_2g(x_1,x_2)) + \log\left(\frac{\cos(x_1+x_2)}{g_1(x_1,x_2)}\right)\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \left[\frac{g(x_1,x_2) + x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)}{x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1} - \right.$$

$$-\frac{x_1x_2g(x_1,x_2)\left(x_2g(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)\left(x_1g(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)}{\left(x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1\right)^2} -$$

$$\left. -\frac{1}{\cos^2(x_1+x_2)} - \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x_1x_2}(x_1,x_2)g(x_1,x_2) - \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)}{g(x_1,x_2)^2}\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) = 0$$

$$0 = \left[\frac{d^2}{dx_2^2}\left(\arctan(x_1x_2g(x_1,x_2)) + \log\left(\frac{\cos(x_1+x_2)}{g_1(x_1,x_2)}\right)\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \left[\frac{2x_1\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)}{x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1} - \right.$$

$$-\frac{2x_1x_2g(x_1,x_2)\left(x_1g(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^2}{\left(x_1^2x_2^2g(x_1,x_2)^2+1\right)^2} - \frac{1}{\cos^2(x_1+x_2)} -$$

$$\left. -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)g(x_1,x_2) - \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^2}{g(x_1,x_2)^2}\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} = -1 - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = -1$$

pertanto

$$g(x_1,x_2) = g(0,0) + \left\langle\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0), \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0)\right), (x_1,x_2)\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\left\langle (x_1,x_2), \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) \end{pmatrix} (x_1,x_2) \right\rangle + o\left(x_1^2+x_2^2\right) = -\frac{x_1^2+x_2^2}{2} + o\left(x_1^2+x_2^2\right)$$

3.

$$F(x,y_1,y_2) = \left(\sin(y_1) + xe^{y_1} - 1, y_1^2 + \sinh(xy_2) + \log x\right)$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno di $(0,0,1)$, inoltre $F(0,0,1)=(0,0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = \left[\begin{pmatrix} \cos(y_1)+xe^{y_1} & 0 \\ 2y_1 & -x\cosh(xy_2) \end{pmatrix}\right]_{(x,y_1,y_2)=(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r,\rho>0, g\in C^2(B_r(0), B_\rho((0,0)))$ tali che $F(x,g_1(x),g_2(x)) \equiv 0\ \forall x\in B_r(0)$

(b) Supponendo $r \le \frac{1}{2}, \rho \le 1$, si ha

$$\|F(x,0,0)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (\log x)^2} \le |x-1| + |\log x| \le r + 2|x| \le 3r$$

e dunque, per avere $\sup_{x\in B_r(1)} \|F(x,0,0)\| = 3r \le \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} \le \frac{\rho}{2\|T\|}$,

è sufficiente prendere $r = \frac{\rho}{12}$; inoltre,

$$\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(y_1)+xe^{y_1} & 0 \\ 2y_1 & -x\cosh(xy_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\cos(y_1)+xe^{y_1}}{2} & 0 \\ 2y_1 & 1 - x\cosh(xy_2) \end{pmatrix}$$

e dunque, essendo

$$\left|1 - \frac{\cos(y_1)+xe^{y_1}}{2}\right| \le \frac{|1-\cos(y_1)|}{2} + \frac{|1-xe^y|}{2} \le \frac{y_1^2}{2} + \frac{|1-x| + |x||1-e^y|}{2} \le \frac{\rho^2}{2} + \frac{r+\frac{3}{2}3|y|}{2} \le$$

$$\le \rho + \frac{r}{2} + \frac{9}{4}\rho \le \frac{79}{24}\rho$$

$$|2y_1| \le 2\rho$$

$$|1-x\cosh(xy_2)| \le |1-x| + |x||1-\cosh(xy_2)| \le r + \frac{3}{2}3|xy_2| \le r + \frac{9}{4}\left(x^2+y_2^2\right) \le \frac{13}{4}r + \frac{9}{4}\rho \le \frac{121}{48}\rho$$

per avere $\sup_{(x,y_1,y_2)\in B_r(1)\times B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2)\right\| \le$
$\le 2\sup_{(x,y_1,y_2)\in B_r(1)\times B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2)\right\| = \frac{79}{12}\rho \le \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{6}{79}$ e, di conseguenza, $r = \frac{1}{158}$.

(c) Essendo $\sin(g_1(x)) + xe^{g_1(x)} - 1 \equiv 0\ \forall x\in B_r(1)$, allora

$$0 = \left[\frac{d}{dx}\left(\sin(g_1(x)) + xe^{g_1(x)} - 1\right)\right]_{x=1} = \left[g_1'(x)\cos(g_1(x)) + (1 + xg_1'(x))e^{g_1(x)}\right]_{x=1} =$$

$$2g_1'(0)+1 \Rightarrow g_1'(0) = -\frac{1}{2}$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d}{dx}\left(g_1(x)^2+\sinh(xg_2(x))+\log x\right)\right]_{x=1} = [2g_1'(x)g_1(x)+(g_2(x)+xg_2'(x))\cosh(xg_2(x))+$$

$$+\frac{1}{x}\Big]_{x=1} = g_2'(0)+1 \Rightarrow g_2'(0) = -1$$

$$0 = \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin(g_1(x))+xe^{g_1(x)}-1\right)\right]_{x=1} = \big[g_1''(x)\cos(g_1(x))-g_1'(x)^2\sin(g_1(x))+$$

$$+(xg_1''(x)+2g_1'(x)+xg_1'(x)^2)e^{g_1(x)}\Big]_{x=1} = -\frac{3}{4}+2g_1''(0) \Rightarrow g_1''(0) = \frac{3}{8}$$

$$0 = \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(g_1(x)^2+\sinh(xg_2(x))+\log x\right)\right]_{x=1} = \big[2\left(g_1'(x)^2+g_1(x)g_1''(x)\right)+$$

$$+(g_2(x)+xg_2'(x))^2\sinh(xg_2(x))+(2g_2'(x)+xg_2''(x))\cosh(xg_2(x))-\frac{1}{x^2}\Big]_{x=0} =$$

$$= g_2''(0)-\frac{5}{2} \Rightarrow g_2''(0) = \frac{5}{2}$$

dunque lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g è

$$g_1(x) = -\frac{x-1}{2}+\frac{3}{16}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$$

$$g_2(x) = -(x-1)+\frac{5}{4}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$$

4.

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2) = \left(\sqrt{y_1+1}-e^{\sin(x_1+x_2)}, \frac{y_2}{x_1^2+1}-\sin(x_2)\cos(y_2)\right)$$

(a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine, inoltre $F(0,0,0,0) = (0,0)$
e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0) = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1^2+1}+\sin(x_2)\cos(y_2) \end{pmatrix}\right]_{(x_1,x_2,y_1,y_2)=(0,0,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
è invertibile (con $T = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), dunque per
il teorema della funzione implicita $\exists r,\rho > 0, g \in C^2(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$
tali che $F(x_1,x_2,g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2)) \equiv 0 \ \forall x \in B_r((0,0))$

(b) Supponendo $r \le 1, \rho \le \frac{1}{2}$, si ha

$$\|F(x_1,x_2,0,0)\| = \sqrt{(1-e^{\sin(x_1+x_2)})^2+\sin(x_2)^2} \le \left|e^{\sin(x_1+x_2)}-1\right|+|\sin x_2| \le 3|\sin(x_1+x_2)|+|x$$

e dunque, per avere

$$\sup_{x\in B_r((0,0))}\|F(x_1,x_2,0,0)\| \le 7r \le \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} \le \frac{\rho}{2\|T\|}$$

è sufficiente prendere $r = \dfrac{\rho}{28}$; inoltre,

$$\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1^2+1} + \sin(x_2)\cos(y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{y_1+1}} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{x_1^2+1} - \sin(x_2)\cos(y_2) \end{pmatrix}$$

e dunque, essendo

$$\left|1 - \frac{1}{\sqrt{y_1+1}}\right| = \frac{|y_1|}{\sqrt{y_1+1}} \le \frac{|y_1|}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} \le \sqrt{2}|y_1| \le \frac{3}{2}\rho$$

$$\left|1 - \frac{1}{x_1^2+1} - \sin(x_2)\cos(y_2)\right| \le \frac{x_1^2}{x_1^2+1} + |\sin(x_2)\cos(y_2)| \le x_1^2 + |\sin(x_2)| \le r^2 + |x_2| \le$$

$$\le r + r \le \frac{\rho}{12}$$

per avere $\displaystyle\sup_{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in B_r((0,0))\times B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right\| \le$

$\displaystyle\le 2 \sup_{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in B_r((0,0))\times B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y_1,y_2)\right\| = 3\rho \le \frac{1}{2}$

è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{6}$ e, di conseguenza, $r = \dfrac{1}{168}$

(c) Essendo $\sqrt{g_1(x_1,x_2)+1} - e^{\sin(x_1+x_2)} \equiv 0 \ \forall x \in B_r((0,0))$, allora

$$0 = \left[\frac{d}{dx_1}\left(\sqrt{g_1(x_1,x_2)+1} - e^{\sin(x_1+x_2)}\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left[\frac{\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{2\sqrt{g_1(x_1,x_2)+1}} - \right.$$

$$\left. - \cos(x_1+x_2)e^{\sin(x_1+x_2)}\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) - 1 \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0,0) = 2$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d}{dx_2}\left(\sqrt{g_1(x_1,x_2)+1} - e^{\sin(x_1+x_2)}\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \left[\frac{\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{2\sqrt{g_1(x_1,x_2)+1}} - \right.$$

$$\left. - \cos(x_1+x_2)e^{\sin(x_1+x_2)}\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(0,0) - 1 \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(0,0) = 2$$

$$0 = \left[\frac{d}{dx_1}\left(\frac{g_2(x_1,x_2)}{x_1^2+1} - \sin(x_2)\cos(g_2(x_1,x_2))\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \left[\frac{\left(x_1^2+1\right)\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - 2x_1 g_2(x_1,x_2)}{\left(x_1^2+1\right)^2} + \sin(x_2)\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)\sin(g_2(x_1,x_2))\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0,0) = 0$$

$$0 = \left[\frac{d}{dx_2}\left(\frac{g_2(x_1,x_2)}{x_1^2+1} - \sin(x_2)\cos(g_2(x_1,x_2))\right)\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$\left[\frac{\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{x_1^2+1} - \cos(x_2)\cos(g_2(x_1,x_2)) + \sin(x_2)\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)\sin(g_2(x_1,x_2))\right]_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) - 1 \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0,0) = 1$$

dunque lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g è

$$g_1(x_1,x_2) = 2x_1 + 2x_2 + o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$$

$$g_2(x_1,x_2) = x_2 + o\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 5 (30 Marzo 2011)
Teorema della funzione inversa, massimi e minimi vincolati

1.
$$F(x) = e^x \cos(x) - \sqrt{x^2+1}$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno dell'origine con $F(0) = 0$, inoltre $F'(0) = \left[e^x(\cos(x) - \sin(x)) - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_{x=0} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione inversa $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che $F(g(u)) = u \; \forall u \in B_r(0)$

(b) Supponendo $\rho \leq 1$, posto $T = \frac{1}{F'(0)} = 1$, si ha

$$|1-TF'(x)| = \left|1 - e^x \cos(x) + e^x \sin(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq |1-e^x|+|e^x-e^x\cos x|+|e^x \sin(x)|+$$

$$+\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq 3|x|+3|1-\cos(x)|+3|\sin(x)|+|x| \leq 4|x|+\frac{x^2}{2}+3|x| \leq 7\rho+3\frac{\rho^2}{2} = \frac{17}{2}\rho$$

dunque per avere $\sup_{x\in B_\rho(0)} |1 - TF'(x)| \leq \frac{17}{2}\rho \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{1}{17}$ e, di conseguenza, $r = \frac{\rho}{2\|T\|} = \frac{\rho}{2} = \frac{1}{34}$

(c) Essendo $e^{g(u)} \cos(g(u)) - \sqrt{g(u)^2+1} = u \forall u \in B_r(0)$, allora

$$1 = \left[\frac{d}{du}\left(e^g(u)\cos(g(u)) - \sqrt{g(u)^2+1}\right)\right]_{u=0} = \Big[g'(u)e^{g(u)}(\cos(g(u)) - \sin(g(u)))-$$

$$\left.-\frac{g(u)g'(u)}{\sqrt{g(u)^2+1}}\right]_{u=0} = g'(0) \Rightarrow g'(0) = 1$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d^2}{du^2}\left(e^g(u)\cos(g(u)) - \sqrt{g(u)^2+1}\right)\right]_{u=0} = \Big[e^{g(u)}\left(g''(u)(\cos(g(u)) - \sin(g(u)))-\right.$$

$$\left.\left.-2g'(u)^2\sin(g(u))\right) - \frac{g'(u)^2 + g''(u)g(u)\left(g(u)^2+1\right)}{(g(u)^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right]_{u=0} = g''(0)-1 \Rightarrow g''(0) = 1$$

dunque lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g è

$$g(u) = g(0) + g'(0)u + \frac{g''(0)}{2}u^2 + o\left(u^2\right) = u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$$

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$F(x, y) = \left(\cosh(x) - \frac{1}{y+1}, x + \log(\cos y)\right)$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno dell'origine con $F(0) = 0$, inoltre $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0) = \left[\begin{pmatrix} \sinh(x) & \frac{1}{(y+1)^2} \\ 1 & -\tan(y) \end{pmatrix}\right]_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T = \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione inversa $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)$ $\forall u \in B_r((0,0))$

(b) Supponendo $\rho \leq \frac{1}{2}$, si ha

$$\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & -\tan(y) \\ \sinh(x) & 1 - \frac{1}{(y+1)^2} \end{pmatrix}$$

e dunque, essendo

$$|-\tan(y)| \leq 2|y| \leq 2\rho$$

$$|\sinh(x)| \leq 3|x| \leq 3\rho$$

$$\left|1 - \frac{1}{(y+1)^2}\right| = \frac{|y^2+2y|}{(y+1)^2} \leq \frac{\rho^2 + 2\rho}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \leq 12\rho$$

per avere $\sup_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\right\| \leq 2 \sup_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\right\|_\infty \leq 24\rho \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{1}{48}$ e, di conseguenza, $r = \frac{1}{192} = \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$

(c) Essendo $\left(\cosh(g_1(u,v)) - \frac{1}{g_2(u,v)+1}, g_1(u,v) + \log(\cos(g_2(u,v)))\right) = (u,v)$, allora

$$1 = \left[\frac{d}{du}\left(\cosh(g_1(u,v)) - \frac{1}{g_2(u,v)+1}\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v)\sinh(g_1(u,v)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v)}{(g_2(u,v)+1)^2}\right]_{(u,v)=(0,0)} = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 1$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d}{dv}\left(\cosh(g_1(u,v)) - \frac{1}{g_2(u,v)+1}\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)\sinh(g_1(u,v)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)}{(g_2(u,v)+1)^2}\right]_{(u,v)=(0,0)} = \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 0$$

$$0 = \left[\frac{d}{du}\left(g_1(u,v) + \log(\cos(g_2(u,v)))\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g_2}{\partial u}\tan(g_2(u,v))\right]_{(u,v)=(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0) = 0$$

$$0 = \left[\frac{d}{dv}\left(g_1(u,v) + \log(\cos(g_2(u,v)))\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial g_2}{\partial v}\tan(g_2(u,v))\right]_{(u,v)=(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0) = 1$$

dunque lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g è

$$g_1(u,v) = g_1(0,0) + \langle \nabla g_1(0,0), (u,v)\rangle + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = v + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

$$g_2(u,v) = g_2(0,0) + \langle \nabla g_2(0,0), (u,v)\rangle + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = u + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

3.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \qquad f(x,y) = xy$$

A è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, dunque è compatto, e quindi f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A; inoltre, $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$ per $g(x,y) = 1$, dunque, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, i punti di massimo e di minimo per f su A risolvono $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, ovvero:

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases}$$

Se fosse $x = 0$, nella prima equazione si avrebbe $y = 0$, ma l'origine non appartiene ad A, dunque è possibile dividere per x la prima equazione e trovare $\lambda = \frac{y}{2x}$, e sostituendo nella seconda equazione si ottiene $x = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x^2 = y^2$, e sostituendo nuovamente nel vincolo si ha $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; pertanto, si trovano i seguenti punti:

$$P_{++} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_{+-} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_{-+} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_{--} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

valutando infine la funzione nei quattro punti, si trova che

$$\max_A f = f(P_{\pm,\pm}) = \frac{1}{2} \quad \min_A f = f(P_{\pm,\mp}) = -\frac{1}{2}$$

4.

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\} \quad f(x,y,z) = xyz^2$$

A è il tetraedro delimitato dai piani coordinati e dal piano di equazioni $x + y + z = 1$, dunque è compatto, e quindi f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A; inoltre, $f \geq 0$ su A e $f = 0$ se e solo se una delle tre coordinate è nulla; pertanto,

$$\min_A f = f(0,x,y) = f(x,0,z) = f(x,y,0) = 0$$

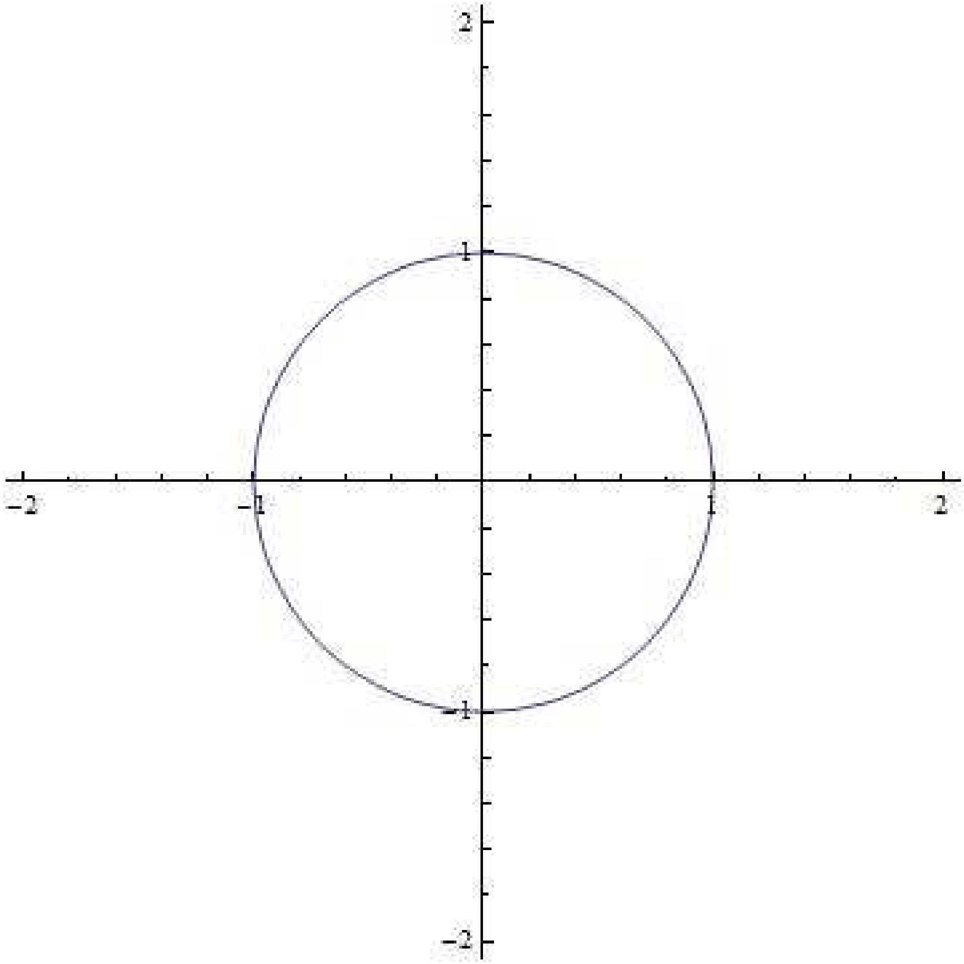


Figure 1: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$

Per quanto riguarda il massimo, invece, potrà essere raggiunto all'interno di A oppure sul bordo: nel primo caso, i punti di massimo risolvono $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, ovvero

$$\begin{cases} yz^2 = 0 \\ xz^2 = 0 \\ 2xyz = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, tutte le soluzioni sono punti in cui la funzione si annulla, e dunque punti di minimo, pertanto il massimo non verrà raggiunto all'interno di A ma sul bordo, in particolare sulla faccia superiore del bordo di A, in quanto sulle altre la funzione si annulla; questa porzione di bordo può essere scritta come $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$, dove $g(x, y, z) = x + y + z$, pertanto i punti di massimo risolvono $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, ovvero:

$$\begin{cases} yz^2 = \lambda \\ xz^2 = \lambda \\ 2xyz = \lambda \end{cases}$$

Sostituendo all'interno della seconda equazione il valore di λ trovato nella prima si ottiene $xz^2 = yz^2$, e dunque $x = y$, perché $f(x, y, 0) = 0$, sostituendo entrambe le quantità nell'ultima equazione si trova $2y^2z = 2xyz = yz^2 \Rightarrow z = 2y$ e sostituendo infine nell'equazione del vincolo si trova $1 = x + y + z = y + y + 2y = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}$, dunque l'unica soluzione è

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

pertanto

$$\max_A f = f(P) = \frac{1}{64}$$

I punti della parabola $y = 2 - x^2$ che distano meno dall'origine sono i punti della parabola dove la funzione distanza all'origine al quadrato $f(x, y) = x^2 + y^2$ raggiunge il valore minimo; poiché la parabola può essere scritta come $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ per $g(x, y) = x^2 + y - 2$, allora i punti in cui viene raggiunto il minimo sono soluzioni di $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, ovvero

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y = \lambda \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene $2x = 4xy$, ovvero $x = 0$ oppure $y = \frac{1}{2}$; sostituendo questi valori nel vincolo si ottengono i punti

$$P_0 = (0, 2) \quad P_+ = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad P_- = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Calcolando f nei tre punti si trova che $f(P_0) = 4$ e $f(P_\pm) = \frac{7}{4}$, dunque i punti di minima distanza dell'origine sono gli ultimi due.

6.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\} \quad f(x, y) = (x - 5)^2 + 2y^2$$

A è la regione di piano che si trova al di sopra della parabola di equazioni $y = x^2$, dunque è illimitato, ma è chiuso e dunque f, essendo continua e coerciva, ammette minimo su A; tuttavia, f è illimitata su A perché

$$\sup_A f \geq f(0, n) = 2n^2 \overset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

Per quanto riguarda il minimo, non può trovarsi all'interno di A perché $\nabla f(x, y) = (2(x - 5), 4y)$ si annulla solo in $(5, 0) \notin A$; dunque, viene raggiunto sul bordo, cioè su $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, dove $g(x, y) = y - x^2$, pertanto i punti di minimo risolvono:

$$\begin{cases} 2(x - 5) = -2\lambda x \\ 4y = \lambda \end{cases}$$

Si ottiene $2(x-5) = -8xy \Rightarrow x = \dfrac{5}{4y+1}$, sostituendo nel vincolo si ottiene $0 = y - \dfrac{25}{(4y+1)^2} = \dfrac{\left(16y^2+24y+25\right)(y-1)}{(4y+1)^2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$, quindi

$$\min_A f = f(1,1) = 18$$

7.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\right\} \qquad f(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt$$

(a) f è definita $\iff$ $x > 0$ oppure $y = 0$, in particolare $\forall (x,y) \in A$ perché $(x-2)^2 \leq (x-2)^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$.

(b)

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt = -\frac{1}{x}[e^{-xt}\sin(yt)]_0^{+\infty} - \frac{y}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(yt)dt =$$

$$= -\frac{y}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(yt)dt = -\frac{y}{x}\left(-\frac{1}{x}[e^{-xt}\cos(yt)]_0^{+\infty} + \frac{y}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt\right) =$$

$$= \frac{y}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt \Rightarrow \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt = \frac{y}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt = \frac{y}{x^2+y^2}$$

(c) A è la circonferenza unitaria centrata in $(2,0)$, dunque e compatta e pertanto f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A: se il massimo o il minimo di f su A fossero raggiunti all'interno, allora verificherebbero

$$(0,0) = \nabla f(x,y) = \left(-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$

tuttavia, dalla seconda equazione si ricava $y = \pm x$ e, sostituendo nella seconda, si ottiene $\mp\dfrac{2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$, ma l'origine non è un punto di A e quindi sia il massimo che il minimo sono raggiunti in $\partial A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$, dove $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 1$, quindi

$$\begin{cases} -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2\lambda(x-2) \\ \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2\lambda y \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che $\lambda = \dfrac{x^2-y^2}{2y\left(x^2+y^2\right)^2}$, oppure $y = 0$ ma in quest'ultimo caso $x = 0$ e $(0,0) \notin A$; sostituendo nella prima equazione si ottiene $-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{\left(x^2-y^2\right)(x-2)}{y\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow -2xy^2 = \left(x^2-y^2\right)(x-2) \Rightarrow$

$y^2 = \dfrac{2x^2 - x^3}{x+2}$; sostituendo nel vincolo si ottiene $1 = (x-2)^2 + \dfrac{2x^2 - x^3}{x+2} = \dfrac{8-4x}{x+2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{6}{5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-(x-2)^2} = \pm\dfrac{3}{5}$; dunque i possibili punti di massimo o di minimo sono

$$P_+ = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad P_- = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Calcolando infine la funzione nei due punti si trova

$$\max_A f = f(P_+) = \frac{1}{3} \quad \min_A f = f(P_-) = -\frac{1}{3}$$

8. Se $y = (0, \ldots, 0)$, allora $\langle x, y \rangle \equiv 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ e dunque anche il suo massimo e il minimo tra i vettori di norma unitaria sono entrambi zero; altrimenti, fissato $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(x) = \langle x, y \rangle$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^n$; inoltre, la sfera $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ può essere scritta come $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$, dove $g(x) = \|x\|^2 - 1$; dunque, per trovare il massimo e il minimo di f su S si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: essendo $\nabla f(x) = (y_1, \ldots, y_n)$ e $\nabla g(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n)$, i punti di massimo e di minimo risolvono

$$\begin{cases} y_1 = 2\lambda x_1 \\ \ldots \\ y_n = 2\lambda x_n \end{cases}$$

Poiché $\lambda \neq 0$, altrimenti $(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)$, allora si ha $x_i = \dfrac{y_i}{2\lambda}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$; sostituendo nel vincolo si ottiene $1 = \|x\| = \dfrac{\|y\|}{2|\lambda|} \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{\|y\|}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{y}{\|y\|}$; calcolando la funzione nei due punti si ottiene

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y \rangle = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \|y\| \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y \rangle = \left\langle -\frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = -\|y\|$$

In particolare, $\|x\| = 1 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|y\|$; se invece $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore qualsiasi non nullo, chiaramente $\dfrac{x}{\|x\|}$ ha norma unitaria, dunque per quanto appena visto $\left\langle \dfrac{x}{\|x\|}, y \right\rangle \leq \|y\| \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$, disuguaglianza che ovviamente è vera anche per $x = 0$, in quanto entrambi i membri sono nulli.

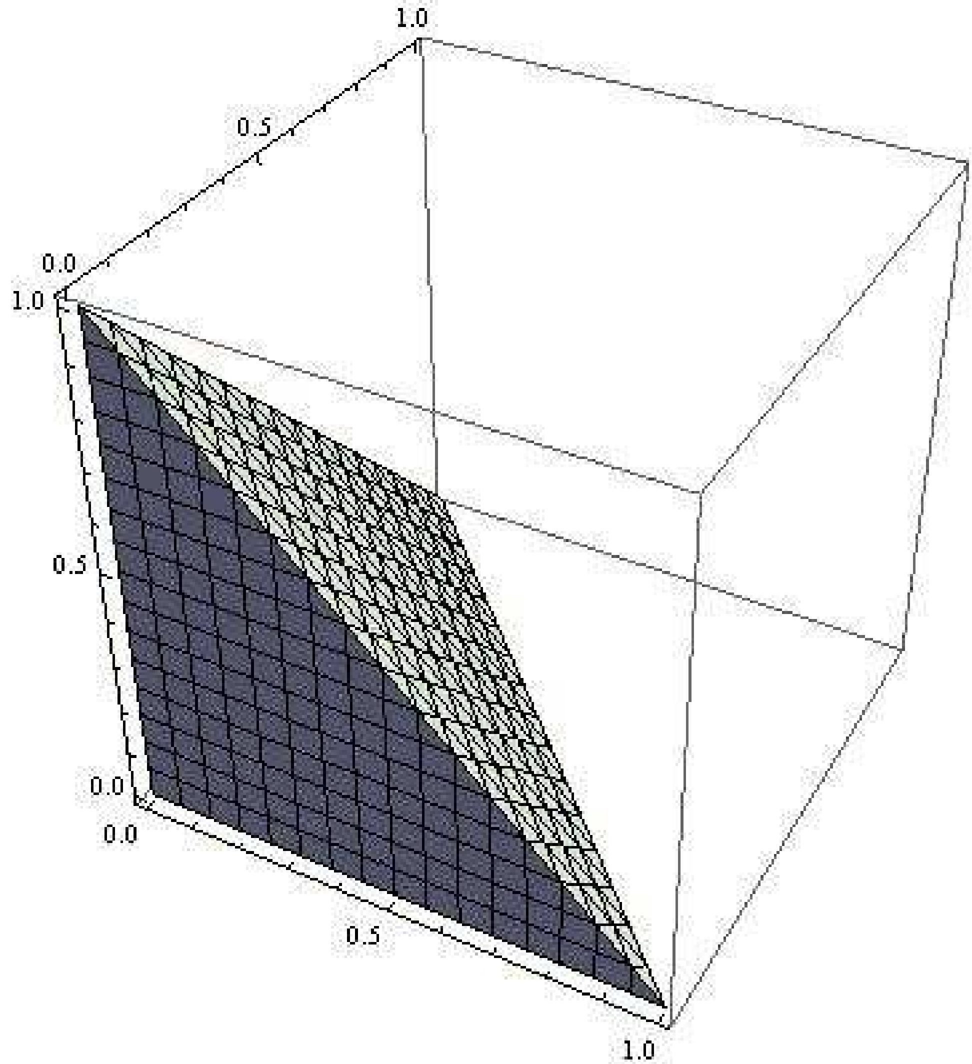


Figure 2: $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$

5.

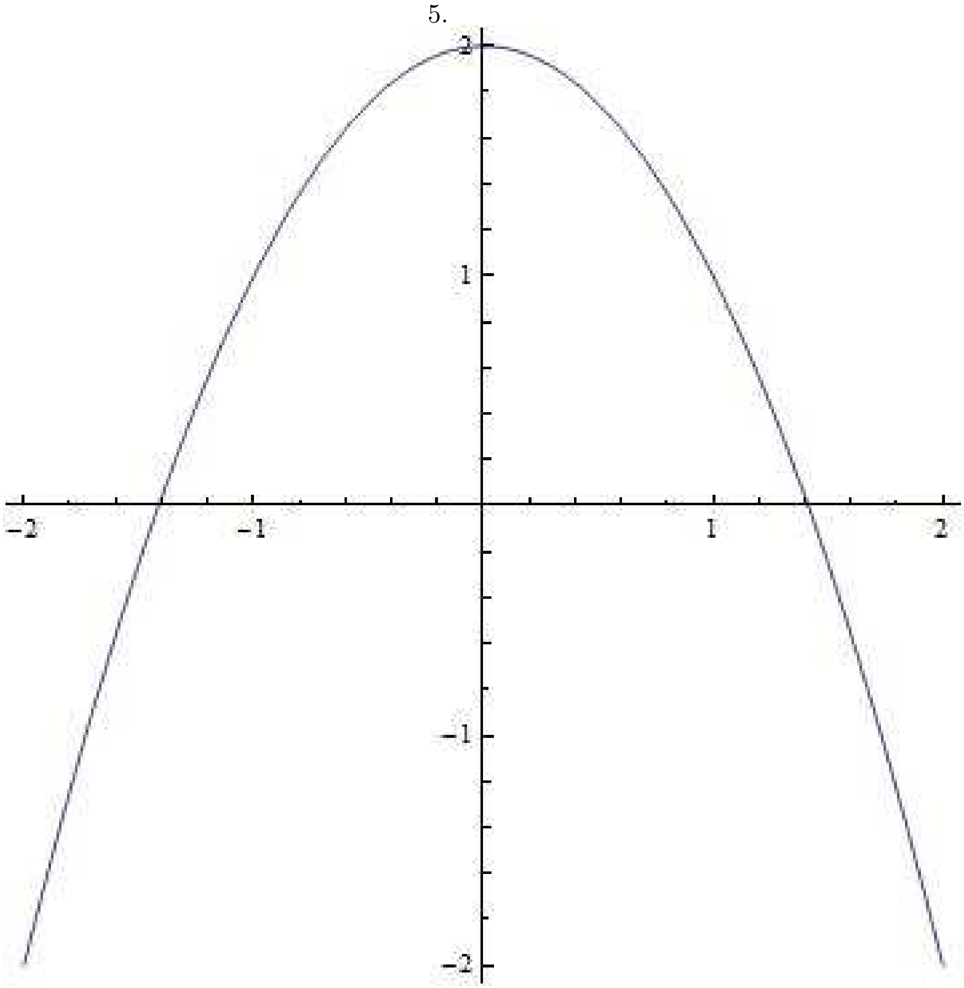


Figure 3: Parabola di equazioni $y = 2 - x^2$

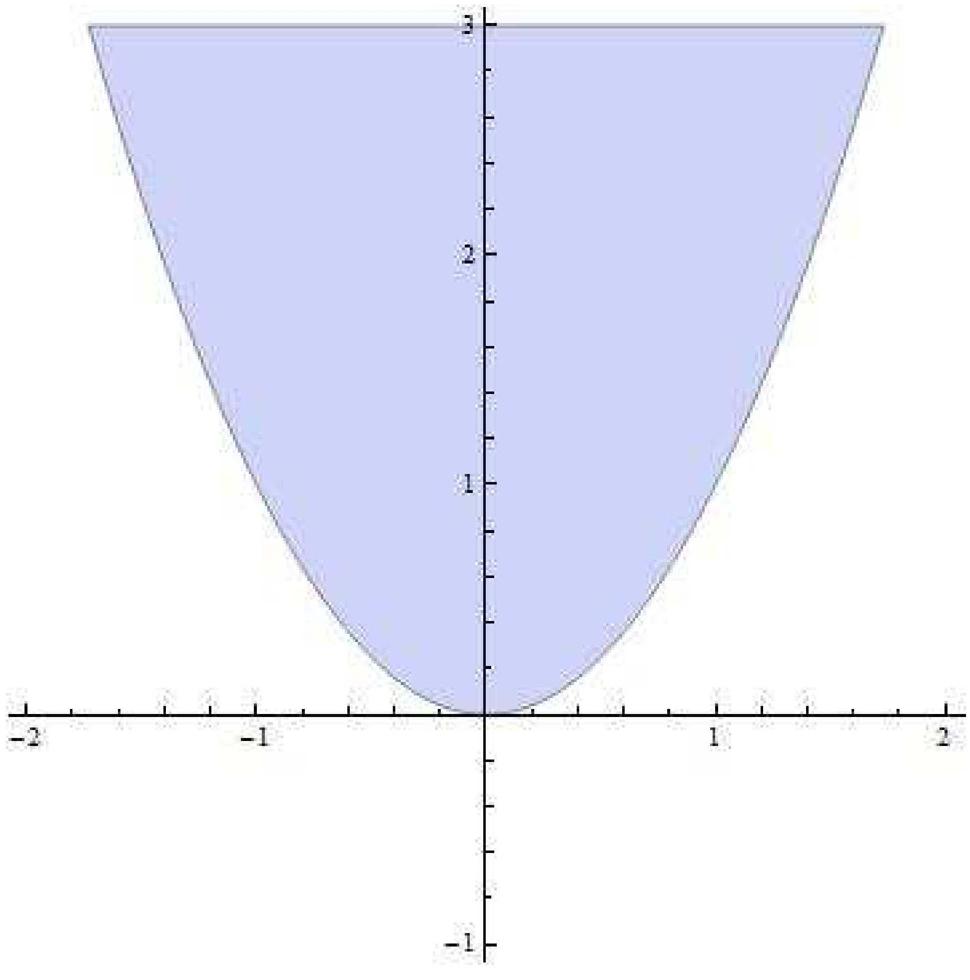


Figure 4: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\}$

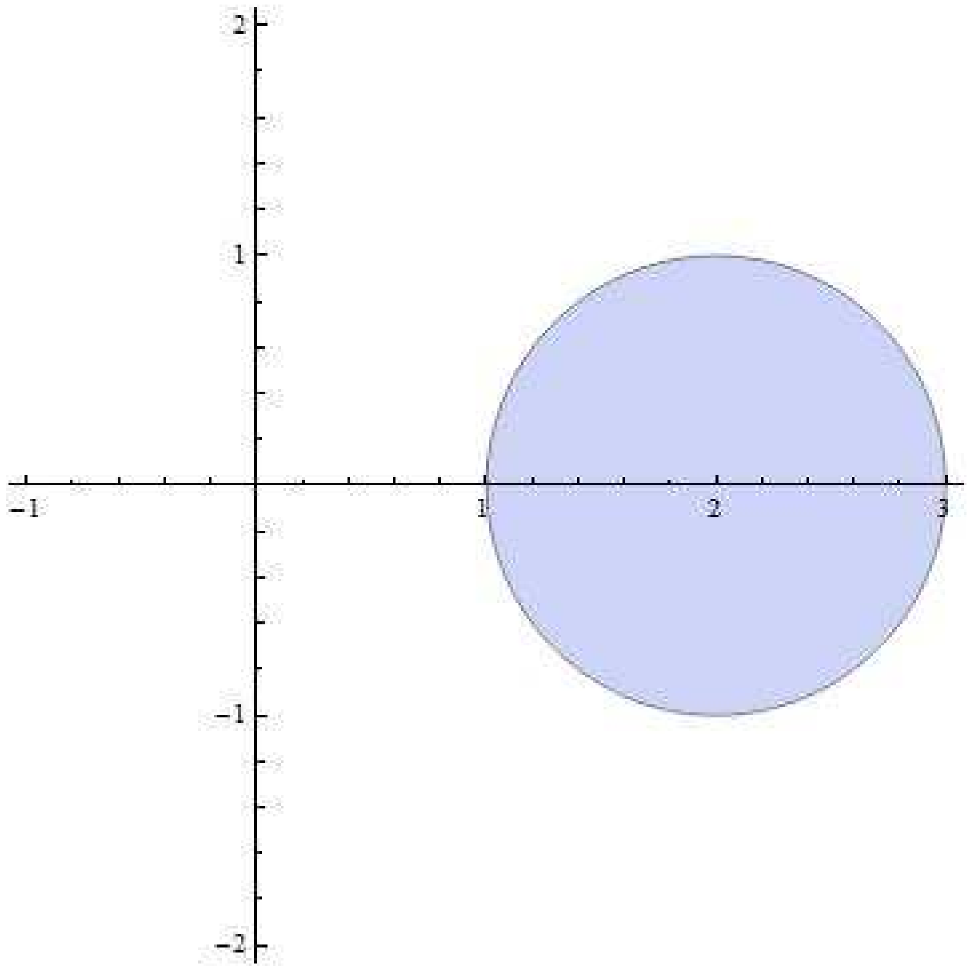


Figure 5: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\right\}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 6 (6 Aprile 2011)
Massimi e minimi vincolati, ripasso

1.
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, x + y \ge 1\right\} \qquad f(x,y) = x(y+1)$$

A è il settore del disco unitario delimitato dalla retta di equazioni $y = 1 - x$,

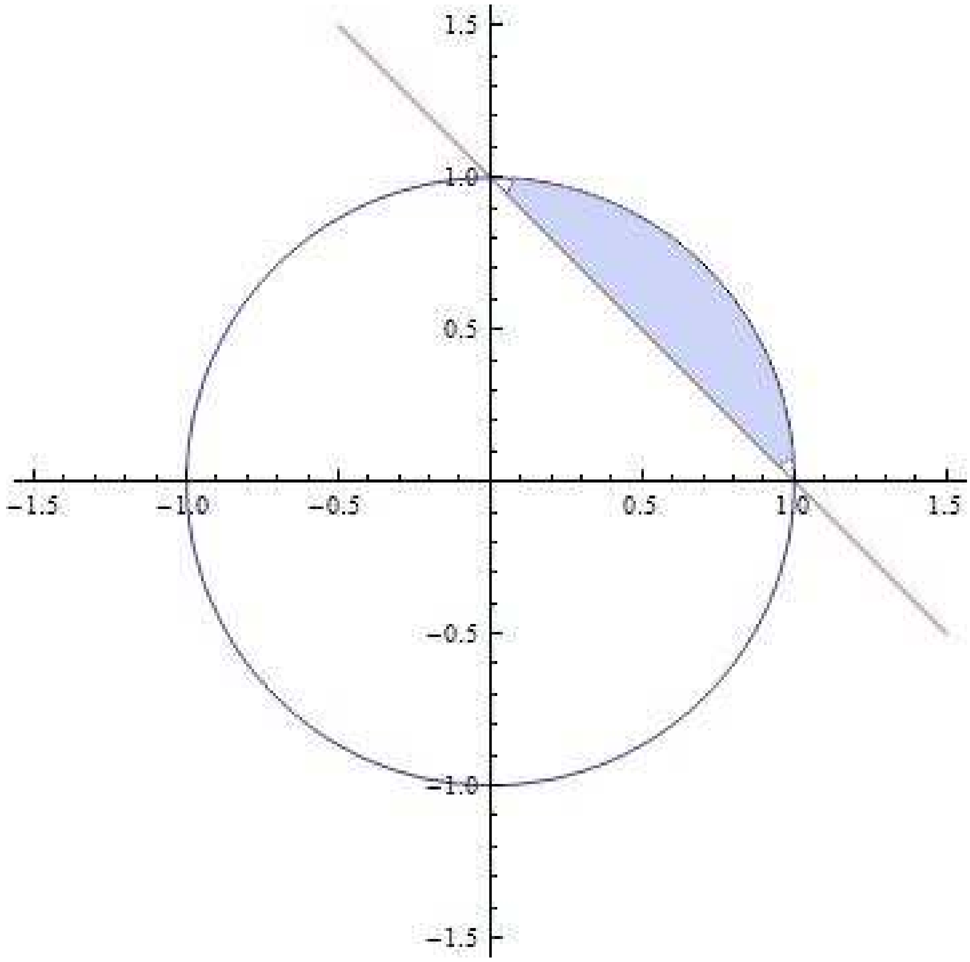


Figure 1: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, x + y \ge 1\right\}$

dunque è compatto e pertanto f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A: questi valori sono raggiunti all'interno di A, oppure all'interno del segmento $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, 0 < x < 1\}$, oppure lungo l'arco $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, o infine nell'intersezione tra queste due curve, cioè nei punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$; nel primo caso si tratta di massimi e minimi liberi, cioè soluzioni di

$$(0, 0) = \nabla f(x, y) = (y + 1), x$$

tuttavia, l'unica soluzione è il punto $(-1, 0)$ che però non appartiene al vincolo; cerco dunque massimi e minimi su A_1: poiché $A_1 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ con $g(x, y) = x + y - 1$, allora questi punti risolveranno $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, ovvero:

$$\begin{cases} y + 1 = \lambda \\ x = \lambda \end{cases}$$

ovvero $x = y + 1$, che sostituito nel vincolo da $2y + 1 = 1$, cioè $y = 0$ e, di conseguenza, $x = 1$; tuttavia, il punto $(1, 0)$ non si trova all'interno del vincolo e quindi verrà considerato separatamente; analogamente si procede per $A_2 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$: le soluzioni risolvono

$$\begin{cases} y + 1 = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases}$$

poichè per $x = 0$ non ci sono punti all'interno del vincolo, nella seconda equazione si può dividere per x trovando così $\lambda = \dfrac{x}{2y}$ che, sostituito nella prima equazione da $y + 1 = \dfrac{x^2}{y}$, ovvero $y^2 + y = x^2$, e sostituendo nuovamente nel vincolo si ottiene $2y^2 + y - 1 = 0$, ovvero $y = \dfrac{1}{2}$ e $y = -1$, ma appartiene all'insieme A soltanto la prima soluzione, a cui corrisponde il punto

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Calcolando la funzione negli altri possibili punti di massimo/minimo

$$P_2 = (1, 0) \quad P_3 = (0, 1)$$

si ottiene che

$$\max_f = f(P_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \min_f = f(P_3) = 0$$

2.

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\right\} \qquad f(x, y, z) = \frac{x + y}{z^2 + 1}$$

A è il cilindro verticale avente per base il disco unitario, dunque è chiuso ma non limitato; tuttavia, poiché $(x_n, y_n, z_n) \in A, \|(x_n, y_n, z_n)\| \to +\infty \Rightarrow |z_n| \to \infty$, si ha che $\displaystyle\lim_{(x_n,y_n,z_n)\in A, \|(x_n,y_n,z_n)\| \to +\infty} f(x_n, y_n, z_n) = 0$, mentre la funzione cambia segno in A, e dunque $\sup_A f > 0$ e $\inf_A f < 0$ vengono raggiunti e sono dunque dei minimi; se fossero raggiunti all'interno si avrebbe

$$(0, 0, 0) = \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{1}{z^2 + 1}, \frac{1}{z^2 + 1}, -\frac{2(x + y)z}{(z^2 + 1)^2}\right)$$

che è assurdo, dunque sia massimo che minimo sono raggiunti sul bordo, che ha equazioni $\partial A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\right\}$ per $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$, pertanto i punti di massimo e di minimo risolvono

$$\begin{cases} \frac{1}{z^2+1} = 2\lambda x \\ \frac{1}{z^2+1} = 2\lambda y \\ -\frac{2(x+y)z}{(z^2+1)^2} = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava $\lambda \neq 0$ e $2\lambda x = \dfrac{1}{z^2+1} = 2\lambda y$, cioè $x = y \neq 0$, mentre dall'ultima si ottiene $z = 0$; sostituendo nell'equazione del vincolo si ottiene $x = y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero i punti

$$P_\pm = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

calcolando infine la funzione nei punti si trova

$$\max_A f = f(P_+) = \sqrt{2} \quad \min_A f = f(P_-) = -\sqrt{2}$$

Un cilindro avente raggio della base pari a r e altezza pari h ha superficie laterale pari a $2\pi rh$, mentre quella di ogni base è πr^2, dunque la superficie totale è $2\pi\left(r^2 + rh\right)$, mentre il volume è $\pi r^2 h$, pertanto massimizzare il volume dei cilindri con superficie totale pari a 2π equivale a massimizzare la funzione $f(r,h) = \pi r^2 h$ sul vincolo $A = \left\{(h,r) :\in \mathbb{R}^2 : r^2 + rh = 1, r > 0, h > 0\right\}$: il vincolo non è compatto, ma per $(r,h) \to (1,0)$ e $(r,h) \to (0,+\infty)$ la funzione, positiva su tutto il vincolo, si annulla, e dunque il massimo viene raggiunto, e sarà una soluzione del sistema $\nabla f(h,r) = \lambda \nabla g(h,r)$, dove $g(h,r) = r^2 + rh$ cioè:

$$\begin{cases} 2\pi rh = \lambda(2r+h) \\ \pi r^2 = \lambda r \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda = \pi r$, che sostituito nella prima da $2\pi rh = \pi r(2r+h)$, cioè $2h = 2r + h$, ovvero $h = 2r$; sostituendo nel vincolo si ottiene $3r^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, pertanto i cilindri di volume massimo hanno raggio pari a $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e altezza pari a $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, e il loro volume è $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

4.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -b \leq x \leq b, 0 \leq y \leq a\left(b^2 - x^2\right)\right\}$$

L'insieme A è normale nella variabile y, cioè è del tipo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c_1 \leq x \leq c_2, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$, pertanto la sua area può essere calcolata con il teorema di Fubini:

$$Area(A) = \int_A 1 dxdy = \int_{-b}^{b} dx \int_0^{a\left(b^2-x^2\right)} dy = \int_{-b}^{b} a\left(b^2 - x^2\right) dx = \left[ab^2 x - \frac{a}{3}x^3\right]_{-b}^{b} = \frac{4}{3}ab^3$$

Per massimizzare questa quantità sul vincolo $a^2 + b^2 = 1$, noto che per $a \to 0$ oppure $b \to 0$ la quantità $\dfrac{4}{3}ab^3$ tende a 0, dunque il massimo è raggiunto all'interno e quindi risolve

$$\begin{cases} \frac{4}{3}b^3 = 2\lambda a \\ 4ab^2 = 2\lambda b \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda = 2ab$, sostituendo nell'altra si ha $\frac{4}{3}b^3 = 4a^2b \Rightarrow a^2 = \frac{b^2}{3}$, inserendo nel vincolo si ottiene $\frac{4}{3}b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, e per questi valori si ottiene

$$\max_{a^2+b^2=1} \frac{4}{3}ab^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 1 \leq y \leq \min\left\{x+1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^4 - 1 \leq y \leq \min\left\{x+1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}\right\}$$

L'insieme A è normale rispetto alla variabile y quindi, come nell'esercizio precedente,

$$Area(A) = \int_A 1dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^4-1}^{\min\left\{x+1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^4-1}^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x^4-1}^{x+1} dy = \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^4 + 1\right) dx + \int_{-1}^{0} \left(x + 1 - x^4 + 1\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^5}{5} + x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{\pi} + \frac{21}{10}$$

6.

$$x_n = \frac{\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) + 1}{k^2}$$

$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in ℓ_2, ove $x(k) = \frac{1}{k^2}$, infatti:

$$\|x_n - x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{k^4} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{k^2}{n^4}}{k^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

la convergenza c'è anche in ℓ_1 perché

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

7.
$$(\Phi f)(x) = \int_0^1 \sin(x \sin(\pi t) f(t)) dt$$

Φ è una contrazione su $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ perché

$$\|\Phi f - \Phi g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 (\sin(x \sin(\pi t) f(t)) - \sin(x \sin(\pi t) g(t))) dt \right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |\sin(x\sin(\pi t)f(t)) - \sin(x \sin(\pi t) g(t))| dt \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |x \sin(\pi t) f(t) - x \sin(\pi t) g(t)| dt \leq$$

$$\leq |x| \|f-g\|_\infty \int_0^1 \sin(\pi t) dt \leq \|f-g\|_\infty \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \|f-g\|_\infty$$

8.
$$F(x, y_1, y_2) = \left(\left(y_2^2 + 1\right) e^{\arctan x} - y_1, \frac{y_2}{y_1} + \sin\left(x^2\right) \right)$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno di $(0,1,0)$, inoltre $F(0,1,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0) = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2y_2 e^{\arctan x} \\ -\frac{y_2}{y_1^2} & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix} \right]_{(x,y_1,y_2)=(0,1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T^{-1} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(0), B_\rho((1,0)))$ tali che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0 \; \forall x \in B_r(0)$.

(b) Supponendo $r \leq 1, \rho \leq \frac{1}{2}$, si ha

$$\|F(x,1,0)\| = \sqrt{\left(e^{\arctan x} - 1\right)^2 + \sin\left(x^2\right)} \leq \left|e^{\arctan x} - 1\right| + \left|\sin\left(x^2\right)\right| \leq 3|\arctan x| + \left|x^2\right| \leq$$

$$3|x| + r^2 \leq 4r$$

e dunque, per avere $\sup_{x \in B_r(0)} \|F(x,1,0)\| \leq 4r \leq \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$
è sufficiente prendere $r = \frac{\rho}{16}$; inoltre,

$$\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2y_2 e^{\arctan x} \\ -\frac{y_2}{y_1^2} & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2y_2 e^{\arctan x} \\ \frac{y_2}{y_1^2} & 1 - \frac{1}{y_1} \end{pmatrix}$$

e dunque, essendo

$$\left|-2y_2 e^{\arctan x}\right| \leq 2|y_2| e^{|x|} \leq 6|y_2| \leq 6\rho$$

$$\left| \frac{y_2}{y_1^2} \right| \leq \frac{|y_2|}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4|y_1| \leq 4\rho$$

$$\left| 1 - \frac{1}{y_1} \right| = \left| \frac{y_1 - 1}{y_1} \right| \leq \frac{\rho}{1 - \frac{1}{2}} = 2\rho$$

per avere $\displaystyle\sup_{(x,y_1,y_2)\in B_r(0)\times B_\rho((1,0))}\left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2)\right\| \leq$
$\displaystyle\leq 2\sup_{(x,y_1,y_2)\in B_r(0)\times B_\rho((1,0))}\left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2)\right\|_\infty \leq 12\rho \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{24}$ e, di conseguenza, $r = \dfrac{1}{384}$.

(c) Essendo $\left(g_2(x)^2+1\right)e^{\arctan x} - g_1(x) \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora

$$0 = \left[\frac{d}{dx}\left(\left(g_2(x)^2+1\right)e^{\arctan x} - g_1(x)\right)\right]_{x=0} = \left[\left(2g_2(x)g_2'(x) + \frac{g_2(x)^2+1}{x^2+1}\right)e^{\arctan x} -\right.$$

$$\left. -g_1'(x)\right]_{x=0} = 1 - g_1'(0) \Rightarrow g_1'(0) = 1$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{g_2(x)}{g_1(x)} + \sin\left(x^2\right)\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{g_2'(x)g_1(x) - g_2(x)g_1'(x)}{g_1(x)^2} + 2x\cos\left(x^2\right)\right]_{x=0} = g_2'(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_2'(0) = 0$$

Dunque lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g è

$$g_1(x) = 1 + x + o(x) \quad g_2(x) = o(x)$$

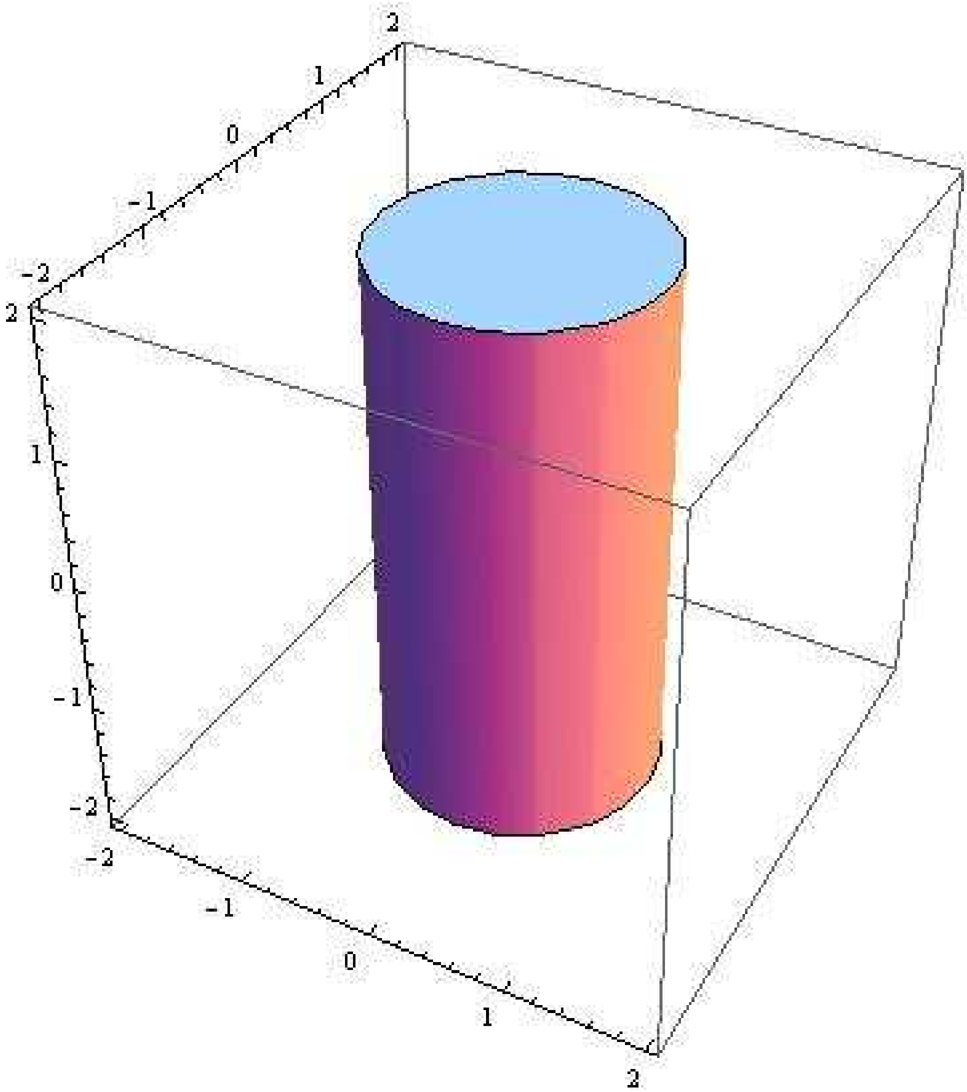


Figure 2: $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

3.

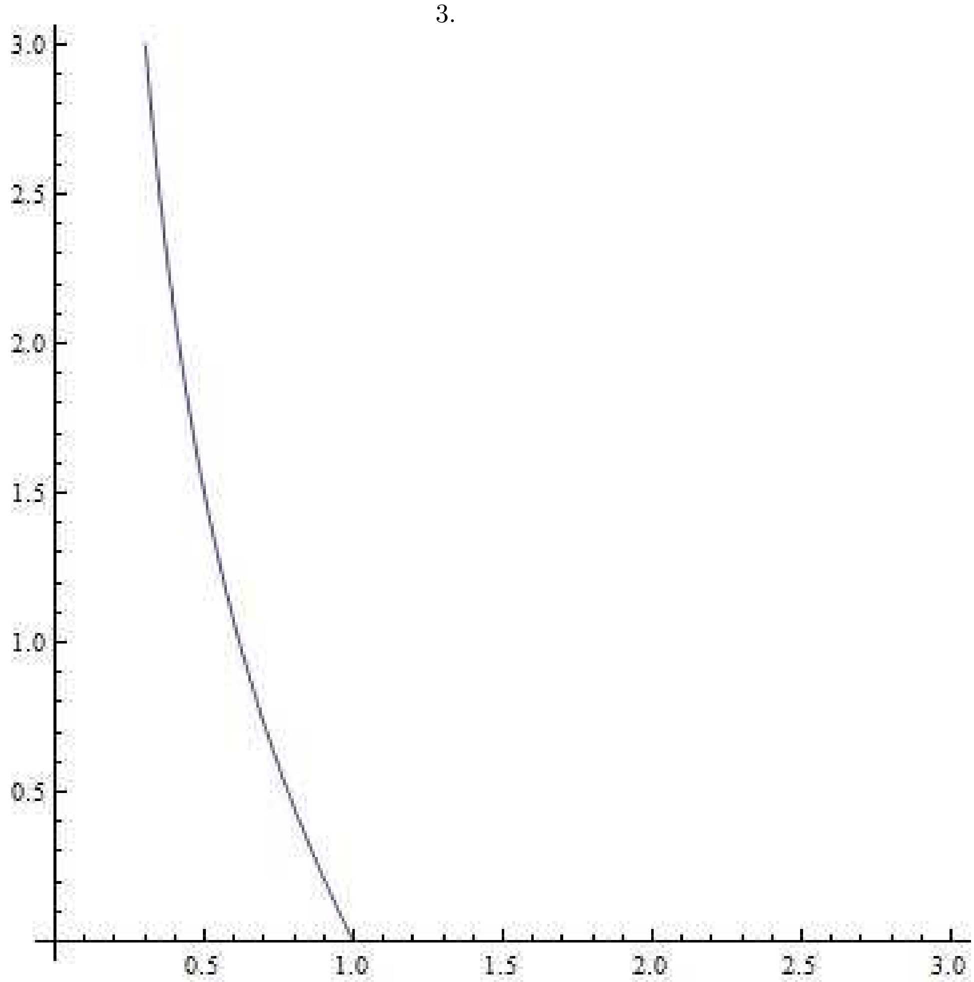


Figure 3: $A = \left\{(h, r) :\in \mathbb{R}^2 : r^2 + rh = 1, r > 0, h > 0\right\}$

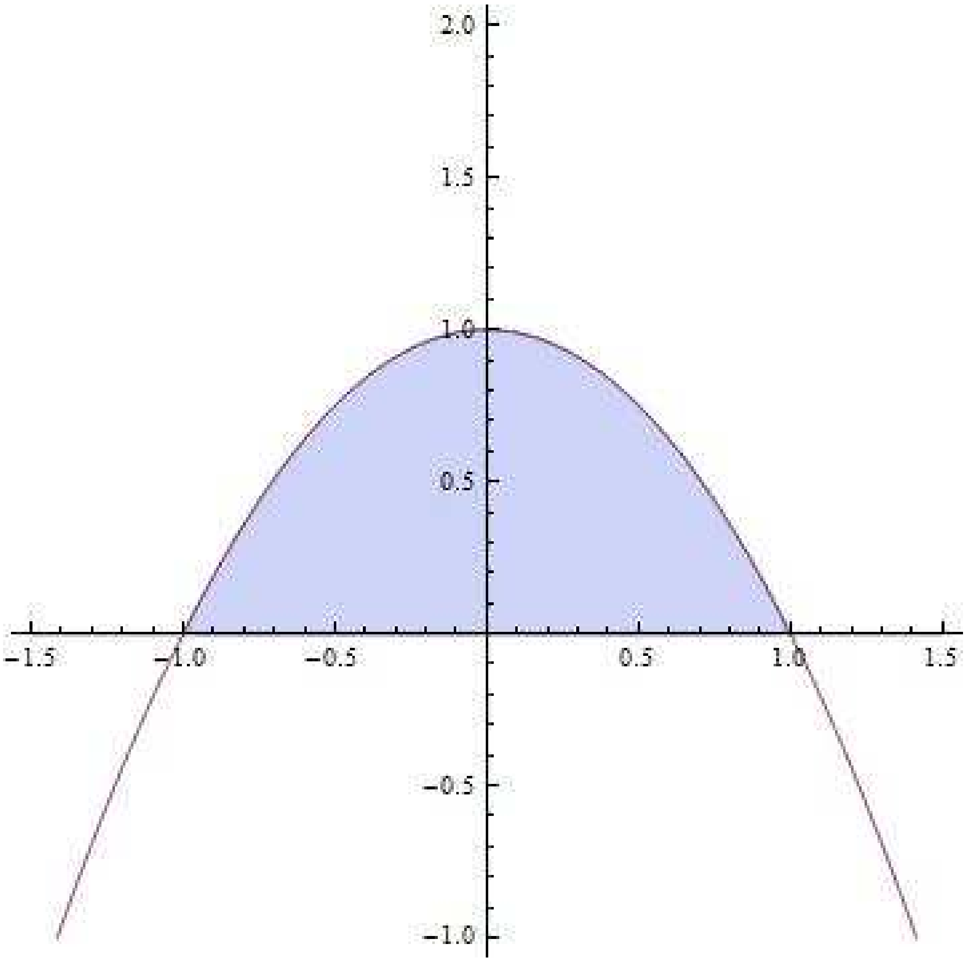


Figure 4: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -b \le x \le b, 0 \le y \le a\left(b^2 - x^2\right)\right\}$

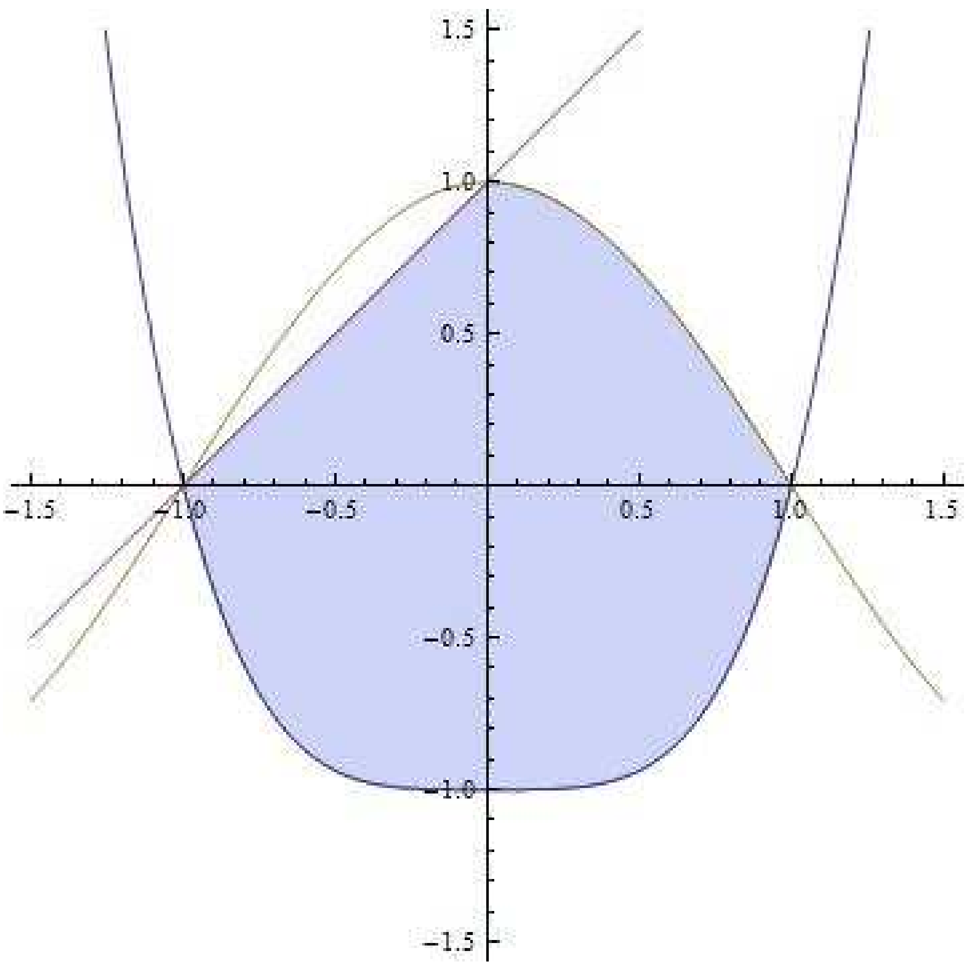


Figure 5: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 1 \leq y \leq \min\left\{x + 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}\right\}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 7 (27 Aprile 2011)

Integrali

1.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\right\}$$

A è la regione del piano compresa tra gli assi cartesiani e le rette di

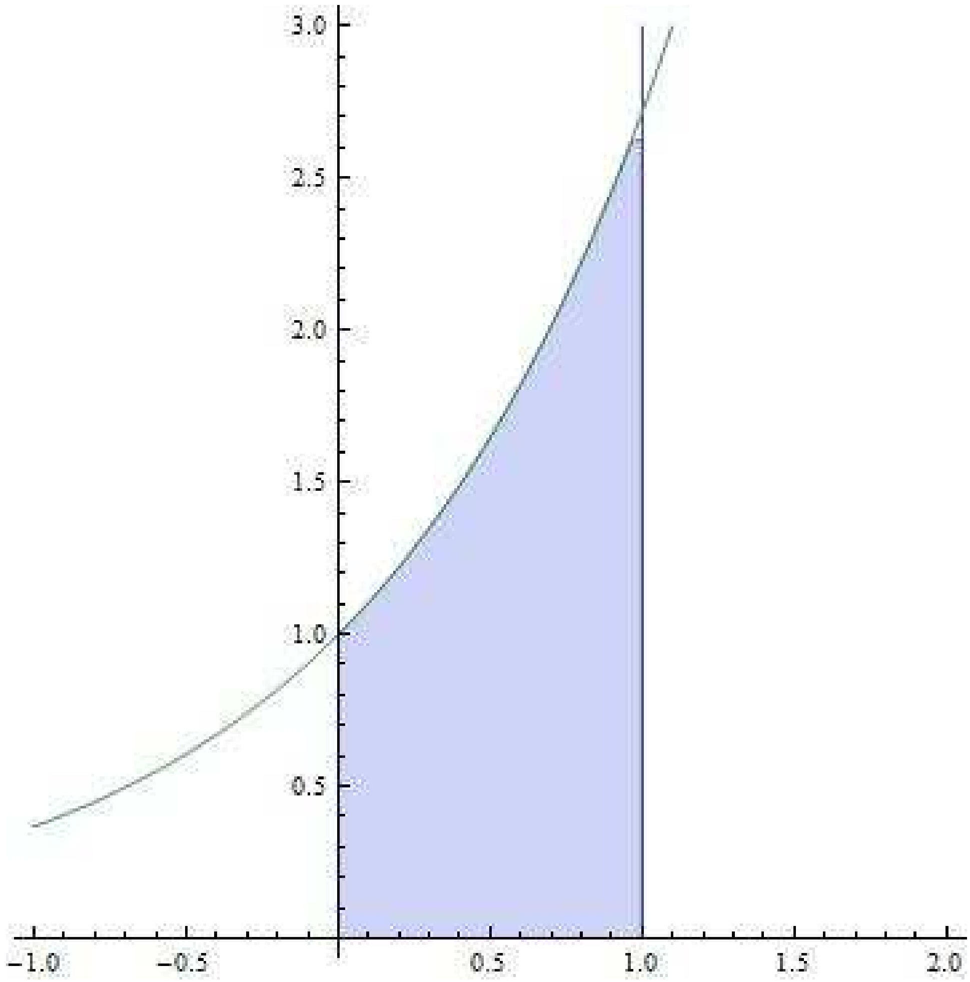


Figure 1: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\right\}$

equazioni $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e il grafico della funzione $y = e^x$, dunque è normale rispetto alla variabile x e quindi per il teorema di Fubini si ha

$$\int_A xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{e^x} xydy = \int_0^1 dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{e^x} = \int_0^1 \frac{xe^{2x}}{2} = \left[\frac{xe^{2x}}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{4}dx = \frac{e^2}{4} - \left[\frac{e^{2x}}{8}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{e^2+1}{8}$$

2.

$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\right\}$

A è il triangolo compreso tra le rette di equazioni $x = 0$, $y = 1$ e $x = y$,

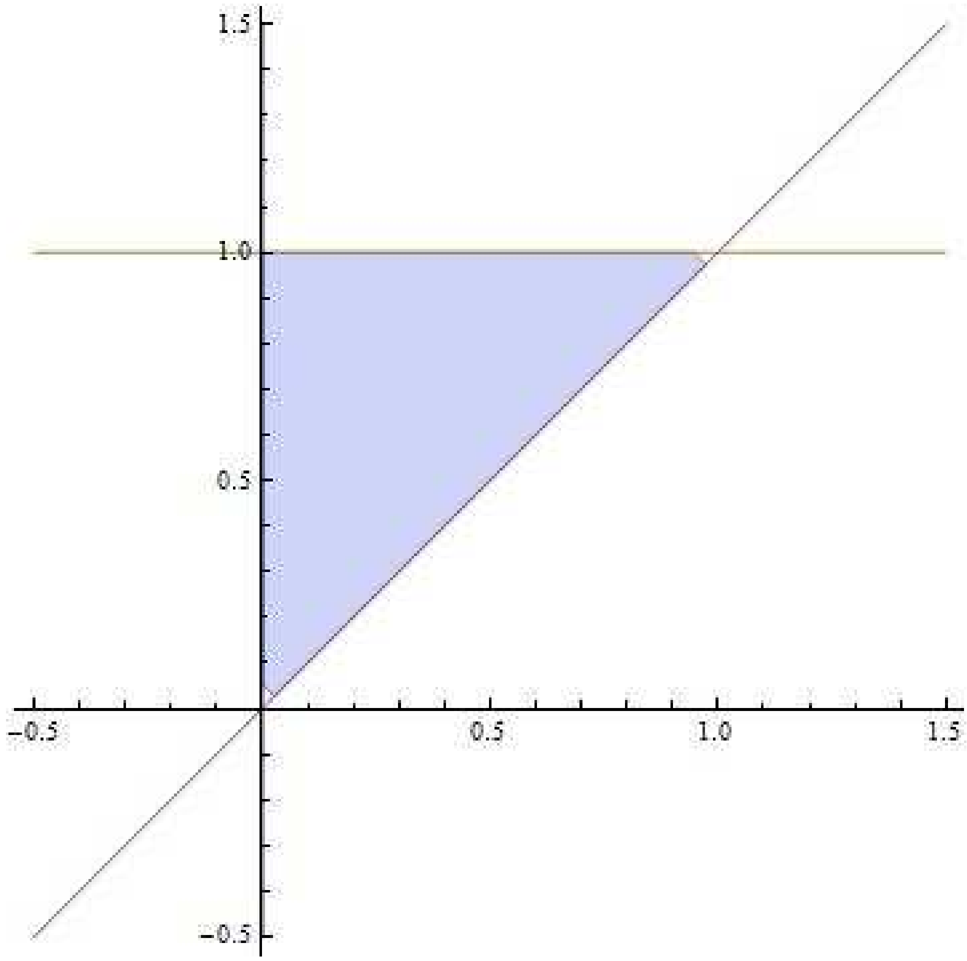


Figure 2: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\right\}$

dunque è normale rispetto alla variabile y e quindi per il teorema di Fubini si ha

$$\int_A e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y dxe^{-y^2} = \int_0^1 ye^{-y^2} = \left[-\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

3.

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le z, 0 \le x \le y \right\}$$

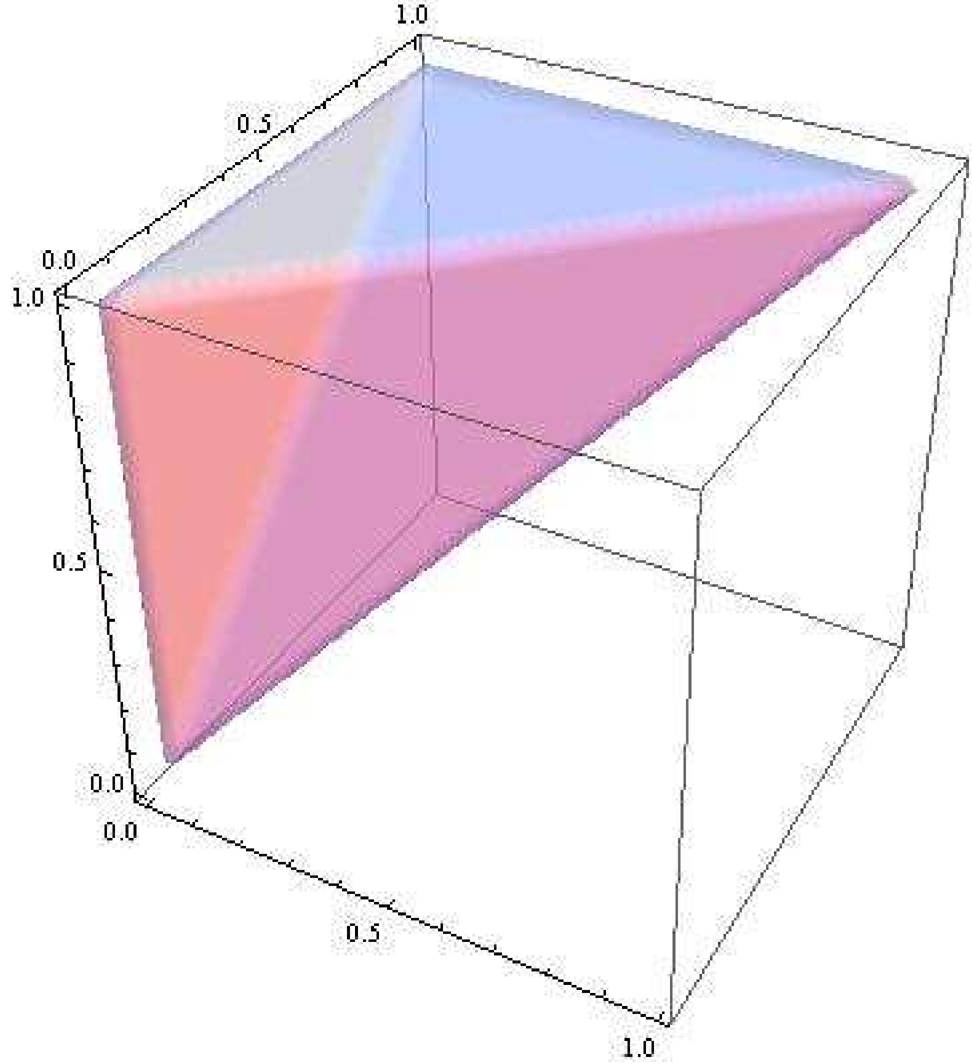


Figure 3: Il tetraedro avente come vertici i punti $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$ e $(1,1,1)$

$$\int_A \sin(\pi xyz) y^2 z^4 dxdydz = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y \sin(\pi xyz) y^2 z^4 dx = \int_0^1 dz \int_0^z dy \left[-\frac{\cos(\pi xyz) yz^3}{\pi} \right]_0^y =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^z dy \frac{yz^3 \left(1 - \cos\left(\pi y^2 z\right)\right)}{\pi} = \int_0^1 dz \left[\frac{y^2 z^3}{2\pi} - \frac{z^2 \sin\left(\pi y^2 z\right)}{2\pi^2} \right]_0^z =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{z^5}{2\pi} - \frac{z^2 \sin\left(\pi z^3\right)}{2\pi^2} \right) dz = \left[\frac{z^6}{12\pi} + \frac{\cos\left(\pi z^3\right)}{6\pi^3} \right]_0^1 = \frac{1}{12\pi} - \frac{1}{3\pi^3}$$

4.

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, y \leq z \leq y e^{x^3 - y^3} \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, y \leq z \leq y e^{x^3 - y^3} \right\}$$

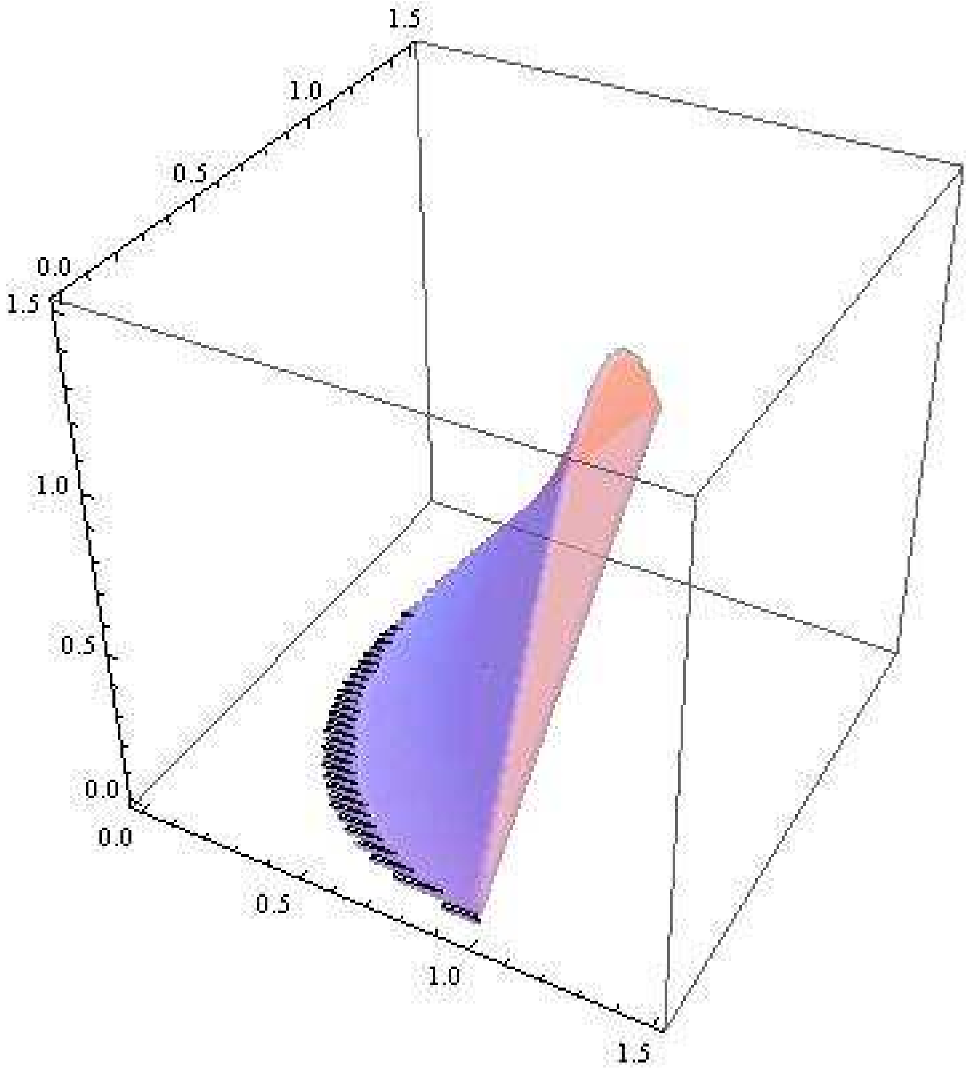


Figure 4: $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, y \leq z \leq y e^{x^3 - y^3} \right\}$

$$\int_A x^2 y e^{y^3} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_y^{y e^{x^3 - y^3}} x^2 y e^{y^3} dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y e^{y^3} \left(y e^{x^3 - y^3} - y \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y^2 \left(e^{x^3} - e^{y^3}\right) dy = \int_0^1 dx \left[\frac{x^2\left(y^3 e^{x^3} - e^{y^3}\right)}{3}\right]_0^x = \int_0^1 \frac{x^5 e^{x^3}}{3} dx + \int_0^1 dx \frac{x^2\left(1 - e^{x^3}\right)}{3} =$$

$$= \left[\frac{x^3 e^{x^3}}{9}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 e^{x^3}}{3} dx + \left[\frac{x^3 - e^{x^3}}{9}\right]_0^1 = \frac{e}{9} - \left[\frac{e^{x^3}}{9}\right]_0^1 + \frac{2-e}{9} = \frac{1}{3} - \frac{e}{9}$$

5.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 2\right\}$$

A è la regione di piano delimitata dalla circonferenza centrata nell'origine

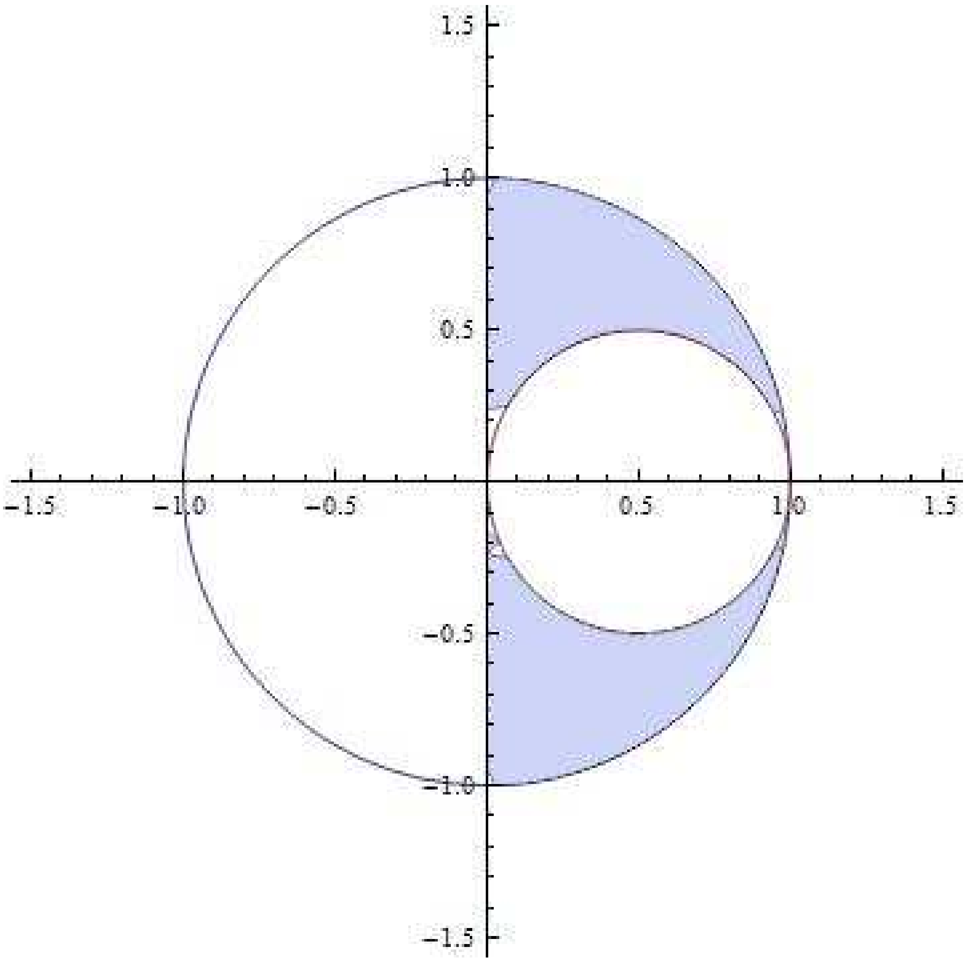


Figure 5: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \leq 2\right\}$

di raggio 2 e la retta di equazioni $x + y = 2$; poiché $A = B \backslash C$, con

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

l'intersezione tra il disco centrato nell'origine di raggio 2 e il primo quadrante, e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

il triangolo con vertici in $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, che è normale rispetto alla variabile x. Passando a coordinate polari per il primo insieme si ha $\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ e $\Phi^{-1}(B) = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] : \rho^2 \leq 1, \rho\cos\theta \geq 0, \rho\sin\theta \geq 0\} =$ $= \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, dunque essendo il determinante jacobiano pari a ρ

$$\int_A y^3 dxdy = \int_B y^3 dxdy - \int_C y^3 dxdy = \int_{\Phi^{-1}(B)} \rho^4 \sin^3\theta d\rho d\theta - \int_0^2 dx \int_0^{2-x} y^3 dy =$$

$$= \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta - \int_0^2 dx \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{2-x} = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(1 - \cos^2\theta\right) d\theta - \int_0^2 \frac{(2-x)^4}{4} dx =$$

$$= \frac{32}{5}\left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{(x-2)^5}{20}\right]_0^2 = \frac{64}{15} - \frac{8}{5} = \frac{8}{3}$$

6.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\right\}$$

A è la porzione del disco unitario centrato nell'origine contenuta nel semipiano di equazioni $x > 0$ meno la circonferenza centrata in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ di raggio $\frac{1}{2}$. Passando a coordinate polari si ha $\Phi^{-1}(A) =$ $= \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos\theta \leq \rho \leq 1\right\}$ e dunque,

$$\int_A x dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta}^1 \rho^2 \cos\theta d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{\rho^3 \cos\theta}{3}\right]_{\cos\theta}^1 =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\left(1 - \cos^3\theta\right)}{3} d\theta = \left[\frac{\sin\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos(2\theta))^2}{1} 2d\theta =$$

$$= \frac{1}{3} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(4t)}{2} 4 + \frac{\cos(2t)}{12} + \frac{1}{8}\right) d\theta = \frac{1}{3} - \left[\frac{\sin(4t)}{96} + \frac{\sin(2t)}{24} + \frac{t}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{8}$$

7.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

A è la porzione del primo ottante delimitata dalla sfera unitaria centrata nell'origine e dal cono con vertice nell'origine, asse verticale e angolo di apertura $\frac{\pi}{4}$. Passando in coordinate polari si ha $\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$ e $\Phi^{-1}(A) = \left\{(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \times [0, \pi] : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, dunque essendo il determinante jacobiano pari a $\rho^2 \sin\varphi$

$$\int_A \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3 + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho^6 + 1} d\rho = \frac{\pi}{2} \left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\arctan\left(\rho^3\right)}{3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{48}\pi^2$$

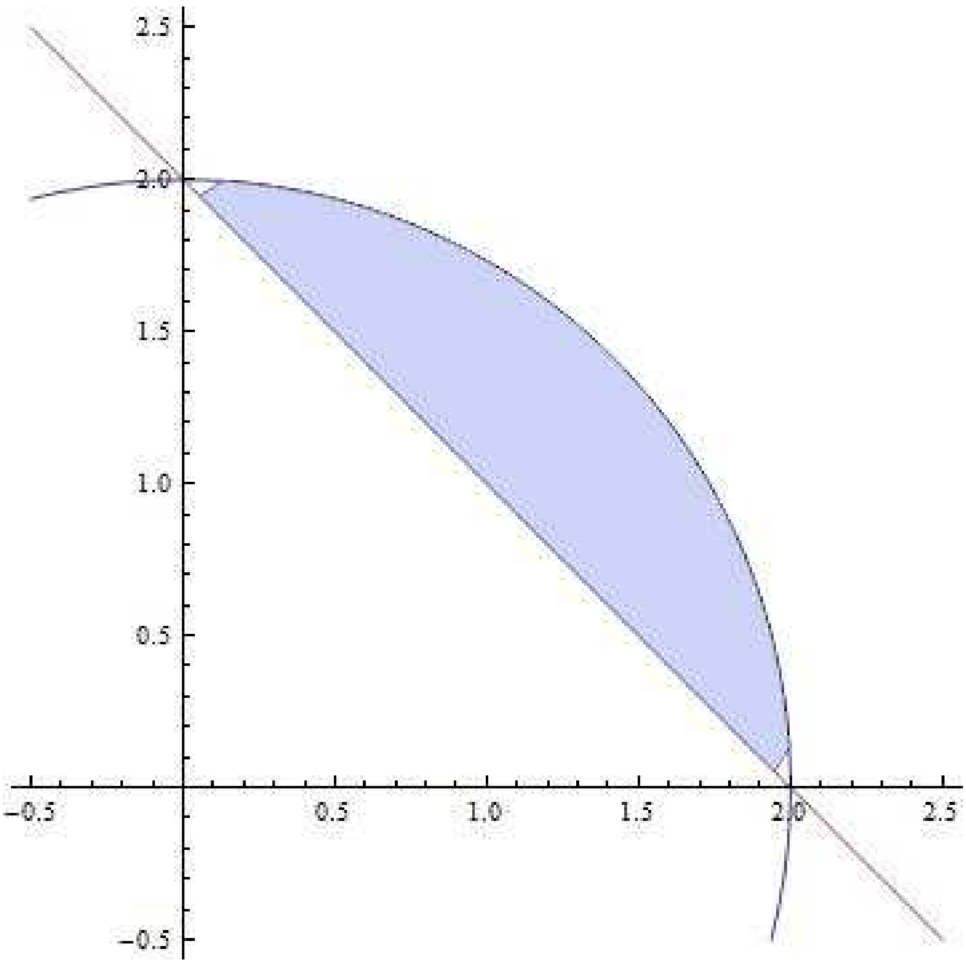


Figure 6: $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \right\}$

8.
$$A_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \right\}$$

Per $n = 1$, A_n è l'intervallo $[0, 1]$, che ha misura pari a $1 = \frac{1}{1!}$, dunque la base dell'induzione è provata. Supponiamo ora che A_n abbia misura pari a $\frac{1}{n!}$ e mostriamo che A_{n+1} ha misura pari a $\frac{1}{(n+1)!}$: poiché

$$A_{n+1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t \leq 1, x_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 - t \right\}$$

allora la sua misura è

$$\int_0^1 dt \int_{A_{n,t}} dx_1 \dots dx_n$$

ove

$$A_{n,t} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \; \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 - t \right\}$$

Con il cambio di variabile

$$(x_1, \dots, x_n) = \Phi(y_1, \dots, y_n) = ((1-t)y_1, \dots, (1-t)y_n)$$

che ha determinante jacobiano pari a $(1-t)^n$, si ottiene

$$\int_0^1 dt \int_{A_{n,t}} dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 dt \int_{\Phi^{-1}(A_{n,t})} (1-t)^n dy_1 \dots dy_n =$$

$$= \int_0^1 dt(1-t)^n \int_{A_n} dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{n!} \left[-\frac{(1-t)^{(n+1)}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

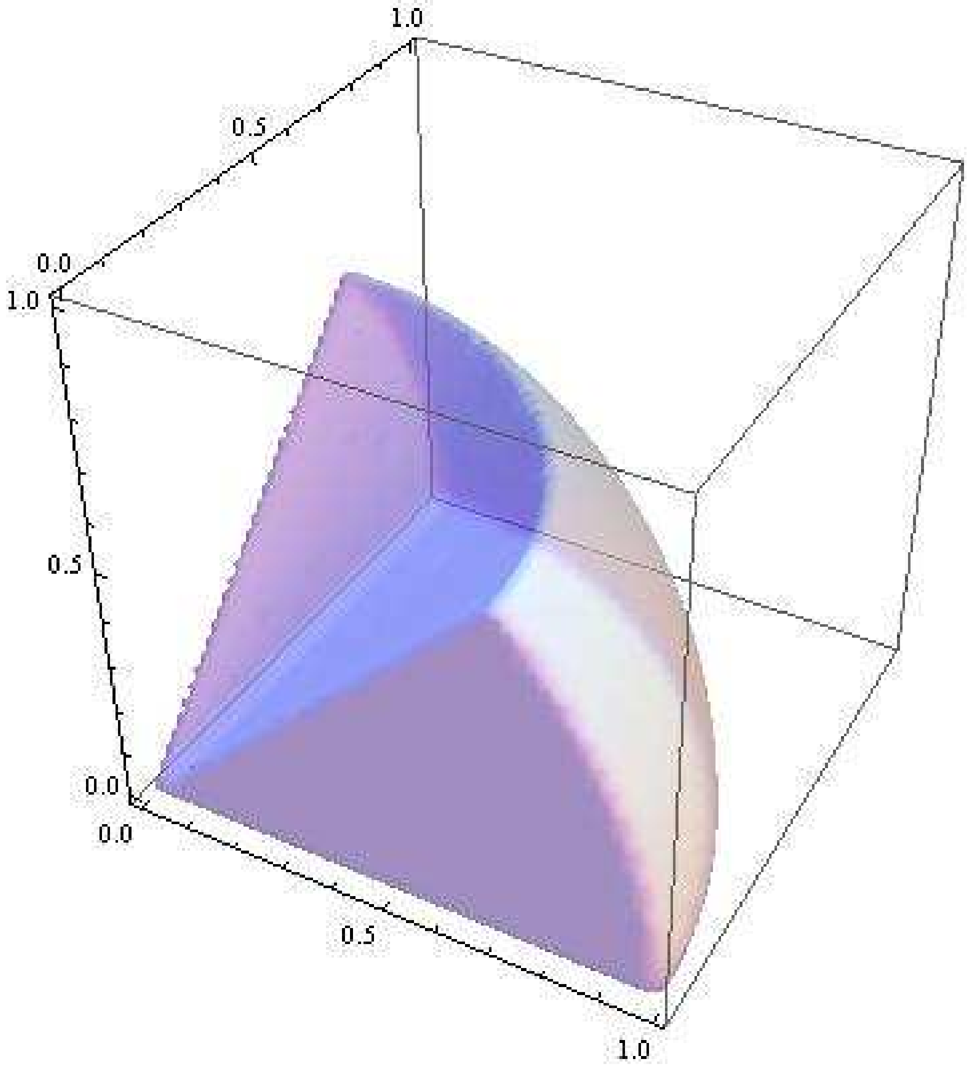


Figure 7: $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni
Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 8 (4 Maggio 2011)
Integrali, curve

1.
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \le 1, 0 \le y \le x\right\}$$

Passando a coordinate ellittiche si ha $(x, y) = \Phi\left(\rho\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{3}\rho\sin\theta\right)$ e

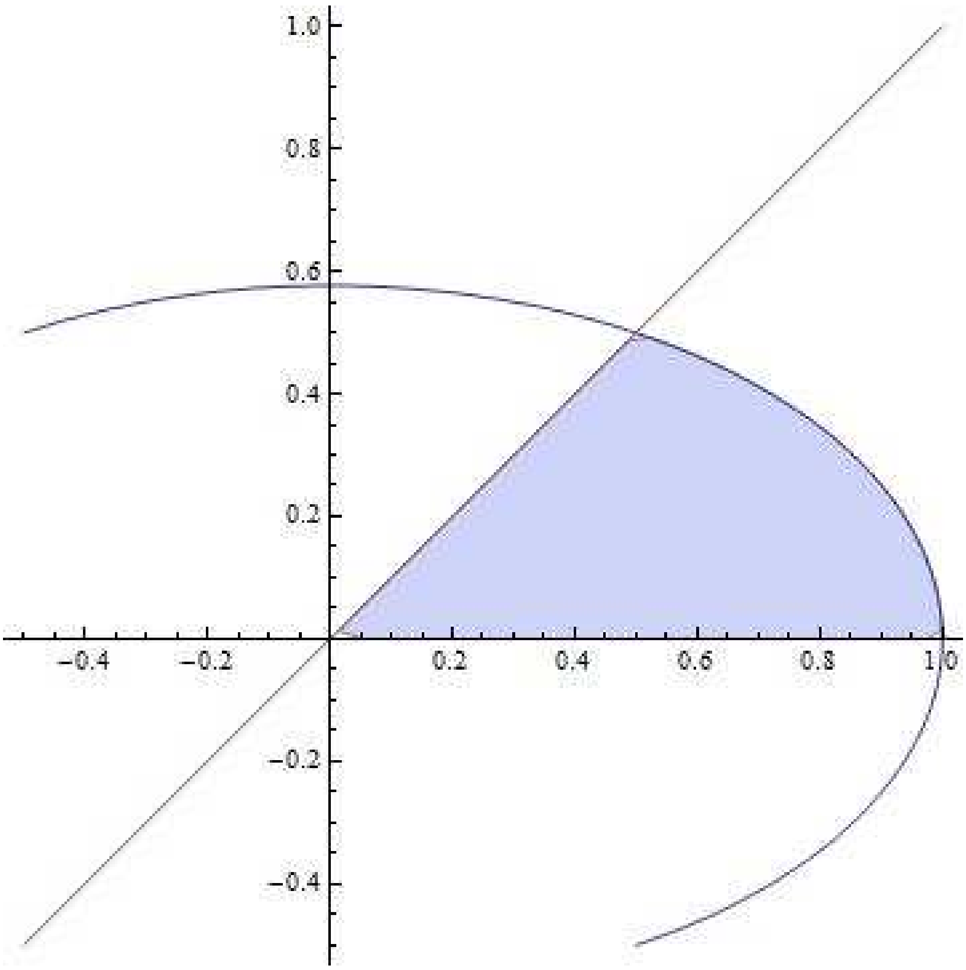


Figure 1: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \le 1, 0 \le y \le x\right\}$

$\Phi^{-1}(A) = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right\}$, dunque essendo il determinante jacobiano pari a $\frac{\sqrt{3}}{3}\rho$, si ha

$$\int_A x^3 dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^4 \cos^3}{\sqrt{3}} \theta d\rho = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \left(1 - \sin^2\theta\right) d\theta \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{15} \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{40}$$

2.

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le \sin^2 z, z \in [0, \pi]\right\}$$

Passando a coordinate cilindriche si ha $(x, y, z) = \Phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)$ e

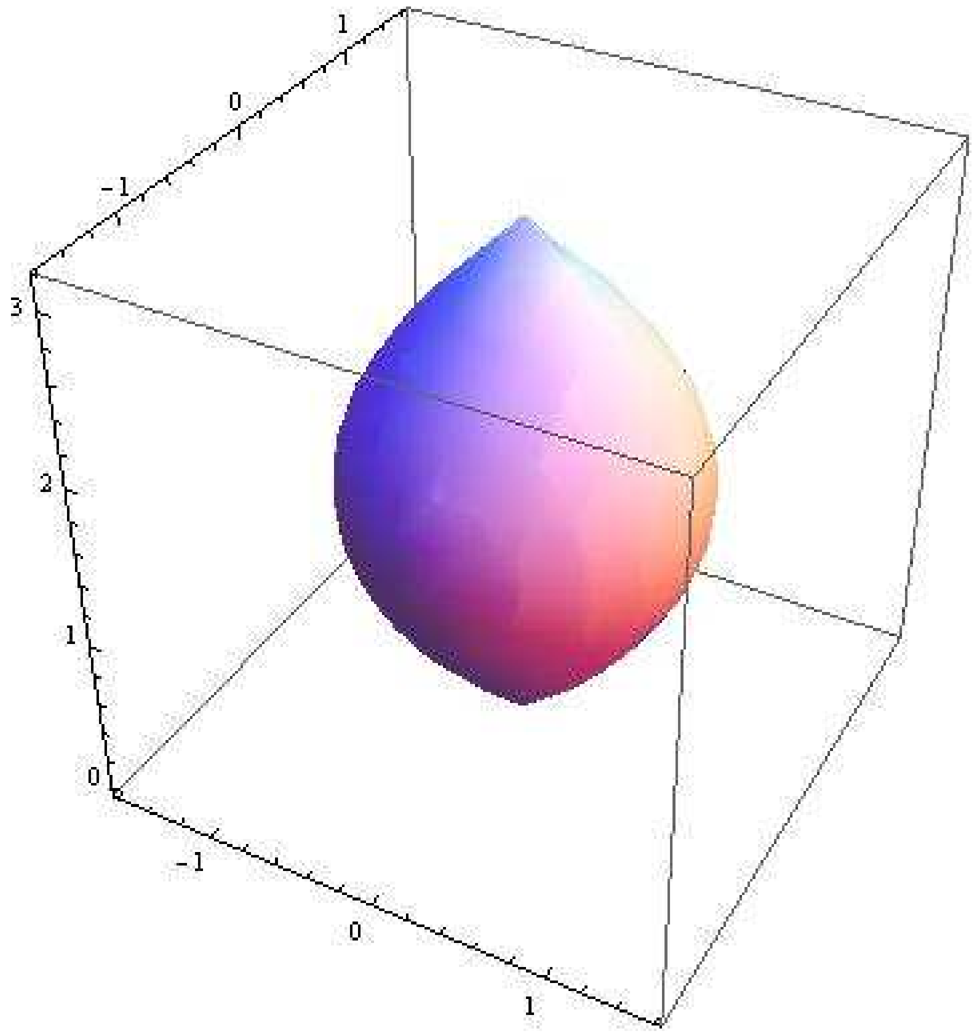


Figure 2: $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le \sin^2 z, z \in [0, \pi]\right\}$

$\Phi^{-1}(A) = \{(\rho,\theta,t) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} : \rho \leq \sin t, t \in [0,\pi]\}$, dunque essendo il determinante jacobiano pari a ρ, si ha

$$Vol(A) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} dt \int_0^{\sin t} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{2} = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \pi \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

3.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 1 - x^3, x \geq 0\right\}$$

Con il cambio di variabile $(x,y) = \Psi^{-1}(u,v)$, ove $\Psi(x,y) = \left(y - x^3, y + x^3\right)$,

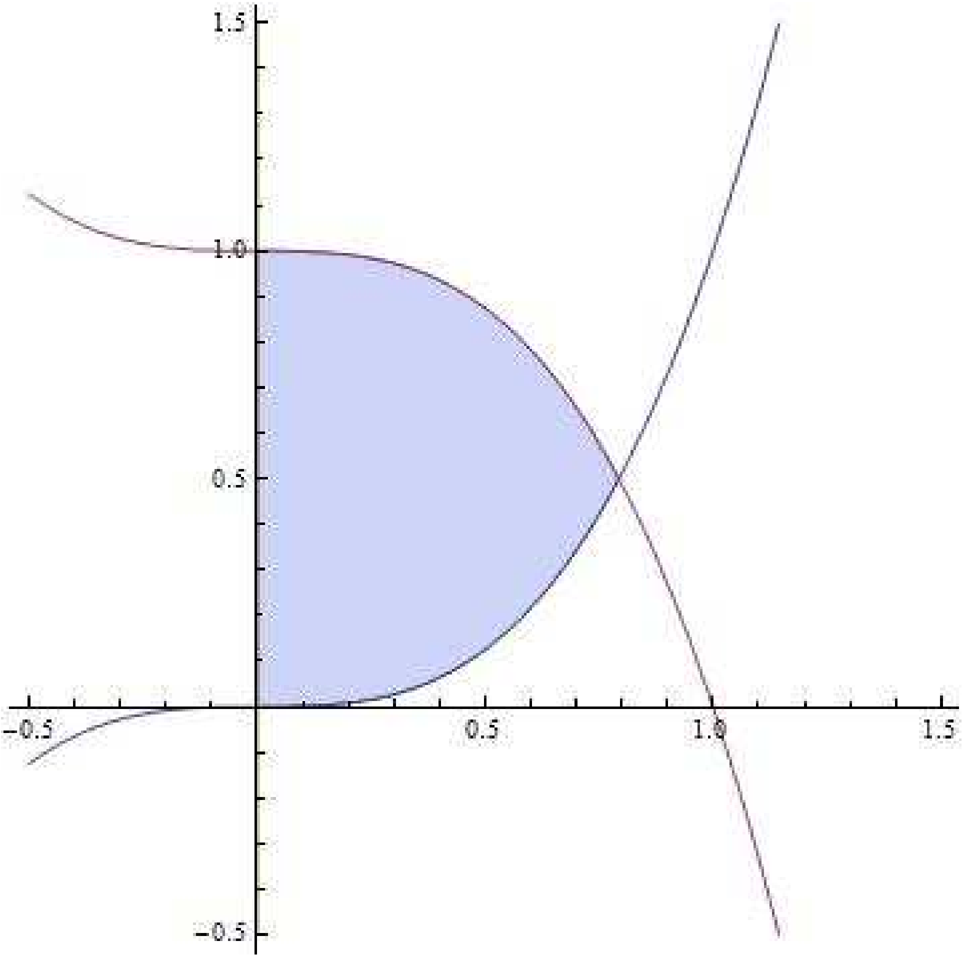


Figure 3: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 1 - x^3, x \geq 0\right\}$

si ha $|\det J_{\Psi^{-1}}(u,v)| = \dfrac{1}{|\det J_{\Phi}(x,y)|} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -3x^2 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{6x^2}$; inoltre, $\Psi(A) =$
$= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u, v \leq 1, u \leq v\right\}$, e dunque

$$\int_A \left(x^2y^2 - x^8\right) e^{x^6+2x^3y+y^2} dxdy = \frac{1}{6}\int_0^1 dv \int_0^v uve^{v^2} du = \frac{1}{12}\int_0^1 v^3 e^{v^2} dv \overset{(t=v^2)}{=} \frac{1}{24}\int_0^1 te^t =$$

$$\frac{1}{24}\left(\left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) = \frac{1}{24}\left(e - \left[e^t\right]_0^1\right) = \frac{1}{24}$$

4.

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2\right\}$$

Essendo l'integrale improprio, è sufficiente integrare su $A_{r,R} = \{(x,y,z) \in A : r^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$

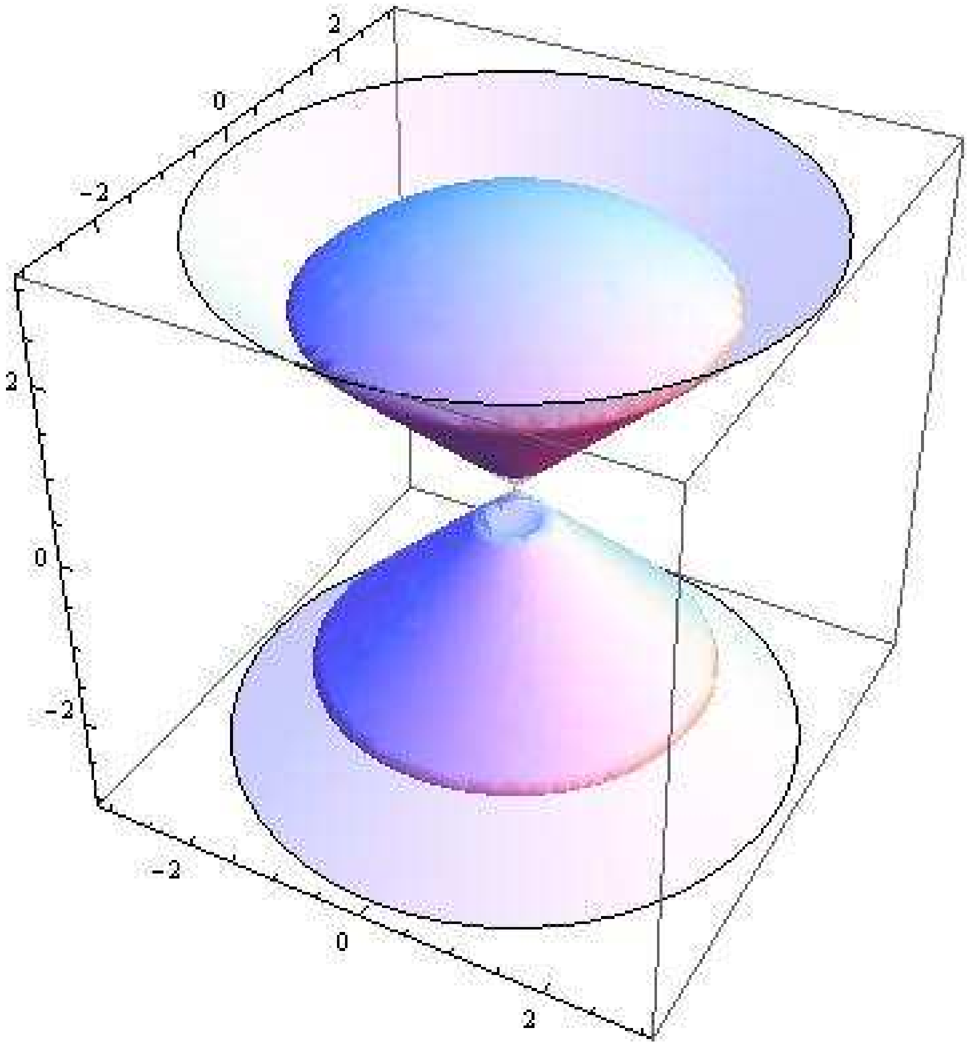


Figure 4: $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2\right\}$

e passare al $\lim\limits_{r\to 0, R\to+\infty}$: in coordinate sferiche, si ha $\Phi^{-1}(A_{r,R}) =$

$$= \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \times [0,\pi] : \rho \in [r,R], \varphi \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi,\pi\right]\right\},$$

dunque

$$\int_A \frac{dxdydz}{z^2\left(x^2+y^2+z^2+1\right)} = \lim_{r\to 0, R\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4}\pi,\pi\right]} d\varphi \int_r^R \frac{\rho^2\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi\left(\rho^2+1\right)} =$$

$$= \lim_{r\to 0, R\to+\infty} 2\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^2+1} = \lim_{r\to 0, R\to+\infty} 4\pi \left[\frac{1}{\cos\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\arctan\rho\right]_r^R =$$

$$= \lim_{r\to 0, R\to+\infty} 4\pi\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\arctan R - \arctan r\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\pi^2$$

5.
$$\gamma(t) = (t+\sin t, \cos t) \quad t\in[0,2\pi]$$

γ non è una curva regolare perché

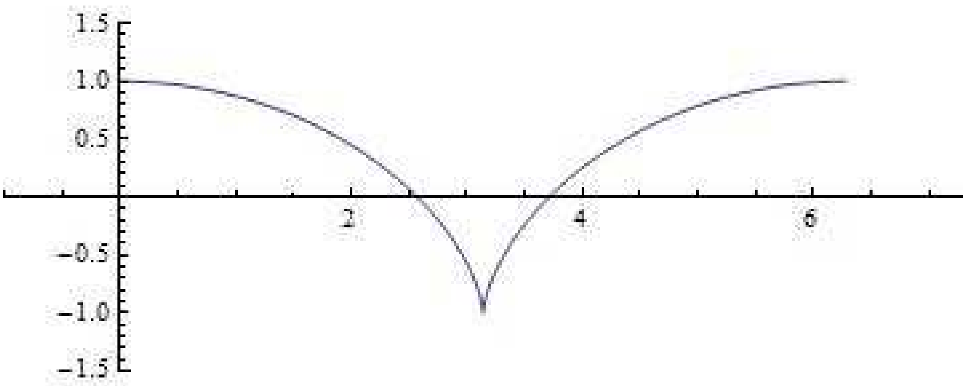


Figure 5: $\gamma(t) = (t+\sin t, \cos t)$

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{(1+\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{2+2\cos t}$$

si annulla in $t=\pi\in(0,2\pi)$, comunque essendo regolare a tratti si può calcolare la sua lunghezza:

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos t}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = 8\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8$$

6.
$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

(a) γ è una curva regolare perché

$$|\gamma(t)| = \sqrt{\left(-3\sin t\cos^2 t\right)^2 + \left(3\cos t\sin^2 t\right)^2} = 3|\sin t||\cos t|\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t} =$$

$$= 3\sin t\cos t \neq 0 \;\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

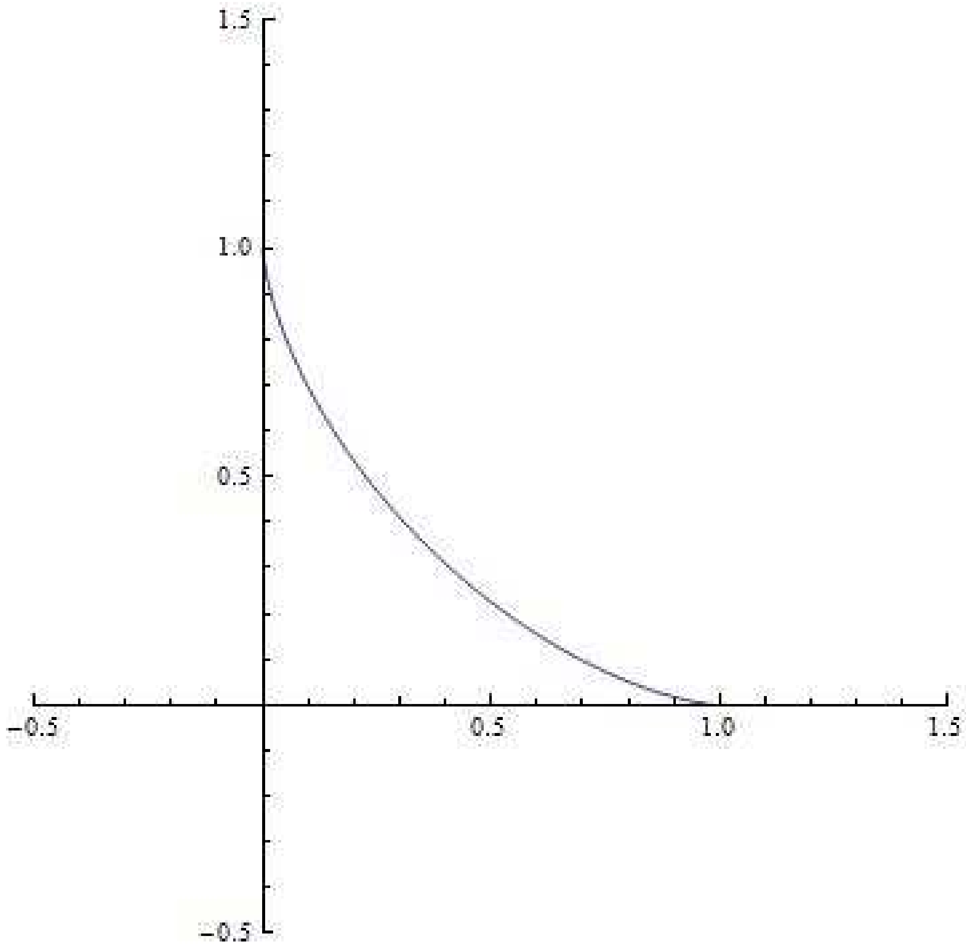


Figure 6: $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$

(b)

$$l(\gamma)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t = \left[\frac{3}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

(c)

$$\int_\gamma e^{y^{\frac{2}{3}}}\,d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t e^{\sin^2 t}dt = \left[\frac{3}{2}e^{\sin^2 t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}(e-1)$$

7. Sia $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge \sqrt{3}|x|\right\}$. Passando in coordinate polari, si ha $\Phi^{-1}(A) = \left\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] : 1\le\rho\le 2, \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2}{3}\pi\right\}$

$$\int_A \frac{dxdy}{y} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} d\theta \int_0^1 \frac{d\rho}{\sin\theta} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}d\theta =$$

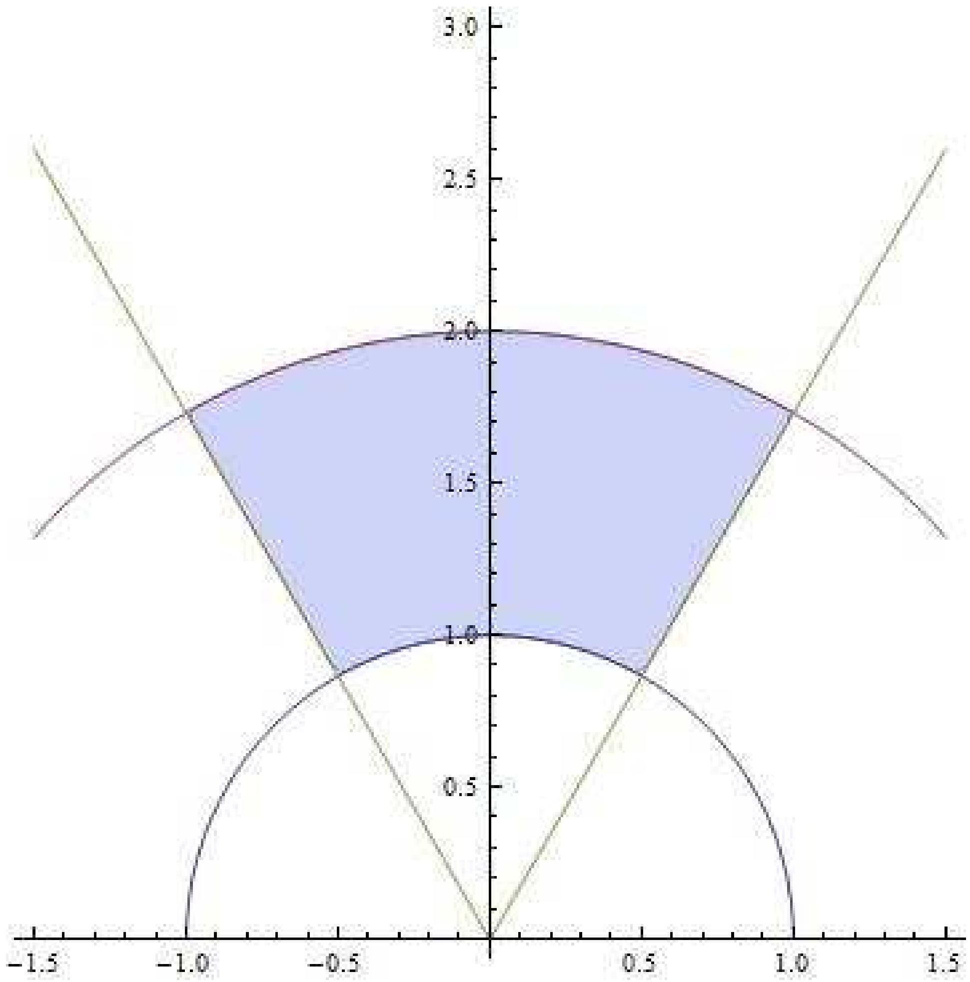


Figure 7: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq \sqrt{3}|x|\right\}$

$$= \frac{1}{2}[\log|1-\cos\theta|]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} + \frac{1}{2}[-\log|1+\cos\theta|]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{3}{2} - \log\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\log\frac{3}{2} - \log\frac{1}{2}\right) = \log 3$$

Il bordo di A è dato dall'unione di quattro curve regolari che possono essere parametrizzate rispettivamente da

$$\gamma_1 = (\cos t, \sin t) \quad t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$$

$$\gamma_2 = \left(t, \sqrt{3}t\right) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\gamma_3 = (2\cos t, 2\sin t) \quad t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$$

$$\gamma_4 = \left(-t, \sqrt{3}t\right) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

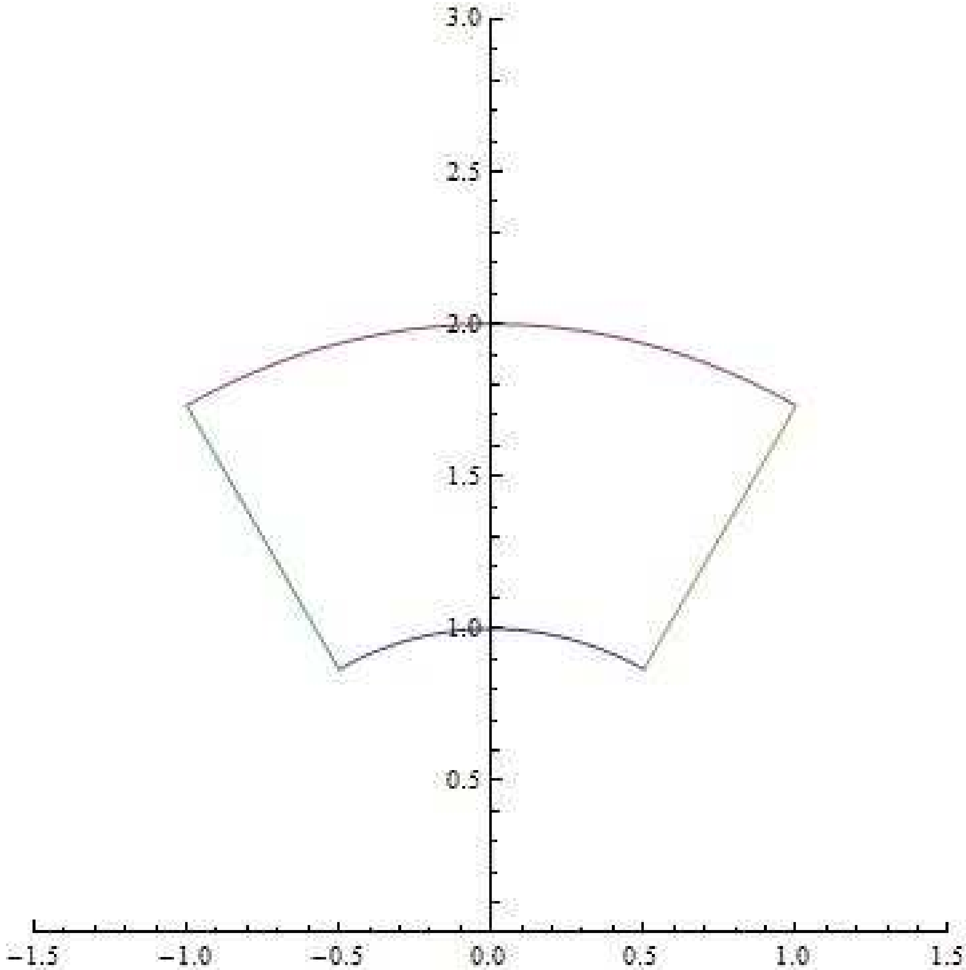


Figure 8: $\partial A = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

Su ogni curva si ha

$$|\dot{\gamma_1}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1 \Rightarrow \int_{\gamma_1} \frac{d\ell}{y} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dt}{\sin t} = \log 3$$

$$|\dot{\gamma_2}(t)| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \Rightarrow \int_{\gamma_2} \frac{d\ell}{y} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2dt}{\sqrt{3}t} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\log|t|\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\log 2$$

$$|\dot{\gamma_3}(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2 \Rightarrow \int_{\gamma_3} \frac{d\ell}{y} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2dt}{\sqrt{3}t} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\log|t|\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{2\sqrt{3}}{2}\log 2$$

$$|\dot{\gamma_4}(t)| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \Rightarrow \int_{\gamma_4} \frac{d\ell}{y} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{2dt}{2\sin t} = \log 3$$

e dunque

$$\int_{\partial A} \frac{d\ell}{y} = \int_{\gamma_1} \frac{d\ell}{y} + \int_{\gamma_2} \frac{d\ell}{y} + \int_{\gamma_3} \frac{d\ell}{y} + \int_{\gamma_4} \frac{d\ell}{y} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \log 2 + 2 \log 3$$

8.

$$A_M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Mx, x\rangle \le 1\}$$

Essendo M simmetrica e definita positiva, per il teorema spettrale $\exists N$ ortogonale tale che $D = N^{-1}MN$ è diagonale; posto $x = \Phi(y) = Ny$, essendo $N^T = N^{-1}$, si ha $\langle MNy, Ny\rangle = \left\langle N^{-1}MNy, y\right\rangle = \langle Dy, y\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli elementi sulla diagonale di D (cioè gli autovalori di M); quindi,

$$\Phi^{-1}(A_M) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle MNy, Ny\rangle \le 1\} = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 y_1^2 + \ldots \lambda_n y_n^2 \le 1\right\}$$

Infine, con il cambio di variabile $y = \Psi(z) = \left(\frac{z_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{z_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ si ottiene

$$\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}(A_M)\right) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : z_1^2 + \ldots z_n^2 \le 1\right\}$$

e dunque, essendo $|\det J_\Phi| = |\det N| = 1$ e $|\det J_\Psi| = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\det M}}$

$$|A_M| = \int_M dx = \int_{\Phi^{-1}(A_M)} dy = \int_{\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(A_M))} \frac{dz}{\sqrt{\det M}} = \frac{B_n}{\sqrt{\det M}}$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 9 (11 Maggio 2011)

Integrali, curve

1. $\gamma(t)=\left(2t,3t^2,3t^3\right)$ per $t\in[0,1]$

   (a)

$$l(\gamma)=\int_0^1|\dot\gamma(t)|dt=\int_0^1\sqrt{2^2+(6t)^2+\left(9t^2\right)^2}dt=\int_0^1\sqrt{4+36t^2+81t^4}=\int_0^1 9t^2+2dt=$$

$$=\left[3t^3+2t\right]_0^1=5$$

   (b)

$$\int_\gamma\frac{\sqrt[3]{z}\log\left(\frac{x}{2}+1\right)}{3y+2}d\ell=\int_0^1\frac{\sqrt[3]{3t^3}\log(t+1)}{9t^2+2}9t^2+2dt=\sqrt[3]{3}\int_0^1 t\log(t+1)dt=$$

$$=\sqrt[3]{3}\left(\left[\frac{t^2}{2}\log(t+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{2(t+1)}dt\right)=\sqrt[3]{3}\left(\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 t-1+\frac{1}{t+1}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{3}\left(\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}-t+\log(t+1)\right]_0^1\right)=\sqrt[3]{3}\left(\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{2}\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$$

2. $\gamma(t)=\left(\frac{\sqrt5}{5}\cos t,\sin t,\frac{2\sqrt5}{5}\cos t\right)$ per $t\in[-\pi,\pi]$

   (a)

$$l(\gamma)=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\left(-\frac{\sqrt5}{5}\sin t\right)^2+(\cos t)^2+\left(-\frac{2\sqrt5}{5}\sin t\right)^2}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt=2\pi$$

   (b)

$$\int_\gamma\frac{|y|}{y^2+5z^2}d\ell=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin t|}{\sin^2 t+4\cos^2 t}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=2\int_0^\pi\frac{\sin t}{3\cos^2 t+1}dt\overset{(s=\cos t)}{=}$$

$$=2\int_{-1}^1\frac{ds}{3s^2+1}=2\left[\frac{\sqrt3}{3}\arctan\left(\sqrt3 t\right)\right]_{-1}^1=\frac{4}{9}\sqrt3\pi$$

3. $\gamma(t)=\left(e^{-t}\cos t,e^{-t}\sin t\right)$ per $t\in[0,+\infty)$

   (a)

$$l(\gamma)=\int_0^{+\infty}\sqrt{\left(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t\right)^2+\left(-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\right)^2}dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}\sqrt{2e^{-2t}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=\sqrt2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\sqrt2\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=\sqrt2$$

(b)

$$\int_\gamma y^2 d\ell = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt + \int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos(2t)dt\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left[\frac{-e^{-3t}}{3}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-3t}\sin(2t)}{2}\right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} e^{-3t}\sin(2t)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-3t}\sin(2t)dt = \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\left(\left[-\frac{e^{-3t}\cos(2t)}{2}\right]_0^{+\infty} - \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos(2t)dt\right) =$$

$$= \frac{13}{24}\sqrt{2}-\frac{9}{8}\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos(2t)dt \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos(2t)dt = \frac{1}{3}-\frac{4}{13}\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma y^2 d\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{9}{13}\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt + \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{13}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{39}\sqrt{2}$$

4. Sia $\gamma(t) = (\cos t, 3\sin t)$ per $t \in [-\pi, \pi]$

(a)

$$\int_\gamma \sqrt{8x^2+1}d\ell = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{8\cos^2 t+1}\sqrt{(-\sin t)^2+(3\cos t)^2}dt = \int_{-\pi}^{\pi} 8\cos^2 t+1dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos(2t)+5dt = [2\sin(2t)+5t]_{-\pi}^{\pi} = 10\pi$$

(b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \gamma\left(\frac{\pi}{6}\right)$, dunque essendo $\dot\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, la retta tangente alla curva in questo punto ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2}t + \frac{3}{2} \end{cases}$ e cartesiane $y = 6 - 3\sqrt{3}x$

5. $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

$$\gamma_1(t) = (t,t) \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_2(t) = (t, 2-t) \quad t \in [1,2]$$
$$\gamma_3(t) = (t,0) \quad t \in [0,2]$$

dunque

$$\int_\gamma xe^y d\ell = \int_{\gamma_1} xe^y d\ell+\int_{\gamma_2} xe^y d\ell+\int_{\gamma_3} xe^y d\ell = \int_0^1 te^t\sqrt{1^2+1^2}dt+\int_1^2 te^{2-t}\sqrt{1^2+(-1)^2}dt+$$

$$+\int_0^2 t\sqrt{1^2}dt = \sqrt{2}\int_0^1 te^t dt+\sqrt{2}e^2\int_1^2 te^{-t}dt+\int_0^2 tdt = \sqrt{2}\left(\left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right)+$$

$$= \sqrt{2}e^2\left(\left[-te^{-t}\right]_1^2 + \int_1^2 e^{-t}dt\right)+\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \sqrt{2}\left(e-\left[e^t\right]_0^1\right)+\sqrt{2}e^2\left(\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}+\left[-e^{-t}\right]_1^2\right)+2 =$$

$$= 2\sqrt{2}e - 2\sqrt{2} + 2$$

6. $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2, 1 \leq z \leq 2\right\}$.
Innanzi tutto, l'insieme è simmetrico rispetto alla variabile y, dunque le funzioni y e y^3, essendo dispari, avranno integrale nullo su A; in coordinate cilindriche, $\Phi^{-1} = \{(\rho,\theta,t) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} : \rho \leq t, 1 \leq t \leq 2\}$, dunque

$$\int_A y\left(y^2+y+1\right) dxdydz = \int_A y^2 dxdydz = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_1^2 dt \int_0^t \rho^3 \sin^2\theta d\rho =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta \int_1^2 dt \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^t = \frac{1}{4}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 t^4 dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{t^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{20}\pi$$

7. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1, x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\right\}$.
In coordinate polari, $\Phi^{-1}(A) = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] : 1 \leq \rho \leq \dfrac{2}{\cos\theta+\sin\theta}, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$, dunque

$$\int_A \frac{x}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \cos\theta d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} - \cos\theta d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\tan\theta} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \overset{s=\arctan s}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{(1+s)\left(1+s^2\right)} - [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s} - \frac{t}{1+s^2} ds + \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} - 1 = \left[\log \frac{1+s}{\sqrt{1+s^2}}\right]_0^{+\infty} + [\arctan s]_0^{+\infty} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 10 (18 Maggio 2011)

Superfici

1.

$$\Phi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \quad (u,v) \in [0, \log 2] \times [-\pi, \pi]$$

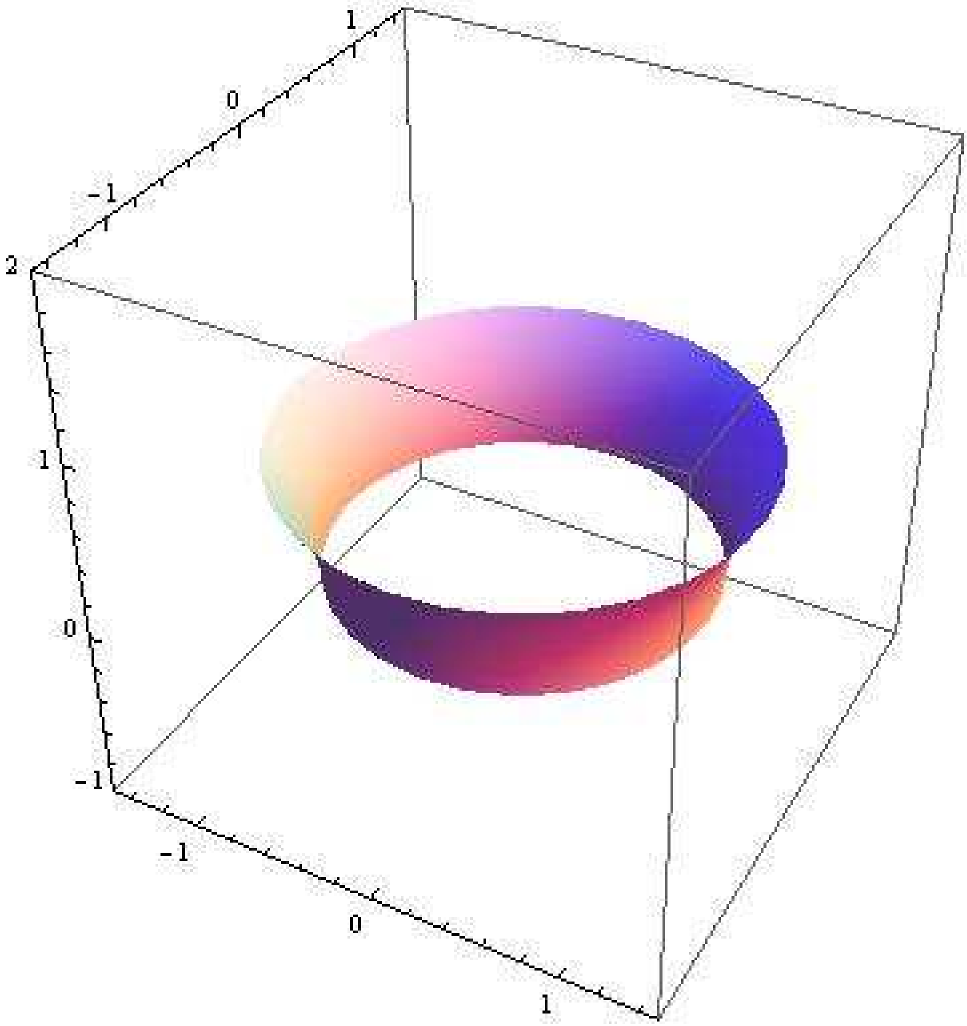


Figure 1: $\Sigma = Im(\Phi)$ con $\Phi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \sinh u \cos v & \sinh u \sin v & 1 \\ -\cosh u \sin v & \cosh u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \cosh u \sinh u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \cosh u^2 \Rightarrow Area(\Sigma) = \int_0^{\log 2} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh^2 u du dv = 2\pi \int_0^{\log 2} \frac{e^{2u} + e^{-2u} + 2}{4} du =$$

$$2\pi \left[\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{8} + \frac{u}{2} \right]_0^{\log 2} = \pi \left(\frac{15}{16} + \log 2 \right)$$

2.
$$\Phi(u,v) = (u, v, e^u) \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,3]$$

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & e^u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-e^u, 0, 1) \Rightarrow \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{e^{2u} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma z^2 d\sigma = \int_0^1 \int_0^3 e^{2u} \sqrt{e^{2u} + 1} du dv \overset{(t = e^{2u})}{=} 3 \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{t+1}}{2} = \left[(t+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^2} = \left(e^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}$$

3.
$$\Phi(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad (u,v) \in [0,\pi] \times [-\pi,\pi]$$

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & -u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u) \Rightarrow \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{u^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} d\sigma = \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} uv \sin v du dv = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^\pi \left([-v \cos v]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos v \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \left(2\pi + [\cos v]_{-\pi}^{\pi} \right) = \pi^3$$

4. Σ è parametrizzata da

$$\Phi(u,v) = ((\cos u + 2) \cos v, (\cos u + 2) \sin v, \sin u) \quad (u,v) \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$$

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -\sin u \sin v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -(\cos u + 2) \sin v & (\cos u + 2) \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\cos u(\cos u + 2) \cos v, -\cos u(\cos u + 2) \sin v, -\sin u(\cos u + 2)) \Rightarrow \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \cos u + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Area(\Sigma) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u + 2 du dv = 2\pi [\sin u + 2]_{-\pi}^{\pi} = 8\pi^2$$

$$\int_\Sigma x^2 + y^2 + z^2 d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (4 \cos u + 5)(\cos u + 2) du dv = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos(2u) + 13 \cos u + 12 du =$$

$$= 2\pi [\sin(2u) + 13 \sin u + 12u]_{-\pi}^{\pi} = 48\pi^2$$

5.
$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\right\}$$
è parametrizzata da
$$\Phi(u,v)=(\cos u\sin v,\sin u\sin v,2\cos v)\quad (u,v)\in[-\pi,\pi]\times[0,\pi]$$
$$\Phi_u\wedge\Phi_v=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -\sin u\cos v & \cos u\sin v & 0\\ \cos u\cos v & \sin u\cos v & -2\sin v\end{vmatrix}=\left(-2\cos u\sin^2 v,-2\sin u\sin^2 v,-\cos v\sin v\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|\Phi_u\wedge\Phi_v\|=\sin v\sqrt{3\sin^2 v+1}\Rightarrow Area(\Sigma)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\sin v\sqrt{4-3\cos^2 v}\,dudv\overset{(t=\cos v)}{=}$$
$$=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-3t^2}dt\overset{\left(s=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}{=}\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin^2 s\,ds=\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{1-\cos(2s)}{2}=$$
$$=\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi\left[\frac{s}{2}-\frac{\sin(2s)}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}=\pi\left(\frac{8}{9}\sqrt{3}\pi+2\right)$$
$$\int_\Sigma\sqrt{16-3z^2}d\sigma=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\sin v\sqrt{16-12\cos^2 v}\sqrt{4-3\cos^2 v}\,dudv=4\pi\int_0^{\pi}\sin v\left(4-3\cos^2 v\right)dv=$$
$$=4\pi\left[-4\cos v+\cos^3 v\right]_0^{\pi}=24\pi$$

6.
$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2\le 3z^2, z\ge 0\right\}$$
$$\partial A=\Sigma_1\cup\Sigma_2$$
ove
$$\Sigma_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R} : x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2=3z^2, z\ge 0\right\}$$
è parametrizzata da
$$\Phi_1(u,v)=\left(u\cos v,u\sin v,\frac{\sqrt{3}}{3}u\right)\quad (u,v)\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\times[-\pi,\pi]$$
con
$$\Phi_{1,u}\wedge\Phi_{1,v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \cos v & \sin v & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}u\cos v,-\frac{\sqrt{3}}{3}u\sin v,u\right)\Rightarrow\|\Phi_{1,u}\wedge\Phi_{1,v}\|=\frac{2\sqrt{3}}{3}u\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Area(\Sigma_1)=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\sqrt{3}}{3}u\,dudv=2\pi\left[\frac{\sqrt{3}}{3}u^2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$
e
$$\Sigma_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R} : x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2\le 3z^2, z\ge 0\right\}$$

è parametrizzata da

$$\Phi_2(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \qquad (u,v) \in [-\pi,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

con

$$\Phi_{2,u} \wedge \Phi_{2,v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -\sin u \sin v & \cos u \sin v & 0 \\ \cos u \cos v & \sin u \cos v & -\sin v \end{vmatrix} = \left(-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\cos v \sin v\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\Phi_{2,u} \wedge \Phi_{2,v}\| = \sin v \Rightarrow Area(\Sigma_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin v du dv = 2\pi[-\cos v]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi$$

Dunque,

$$Area(\partial A) = Area(\Sigma_1) + Area(\Sigma_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\pi$$

7.
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y, z = x^2 - y^2\right\}$$

è parametrizzata da

$$\Phi(u,v) = \left(u\cos v, u \sin v, u^2\left(\cos^2 v - \sin^2 v\right)\right) \qquad (u,v) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos v & \sin v & 2u\left(\cos^2 v - \sin^2 v\right) \\ -u \sin v & u \cos v & -4u^2 \sin v \cos v \end{vmatrix} = \left(-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = u\sqrt{4u^2+1} \Rightarrow Area(\Sigma) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sqrt{4u^2+1} du dv \overset{(t=4u^2)}{=}$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^4 \sqrt{t+1} dt = \frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{5\sqrt{5}-1}{24}\pi$$

8.
$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + z^2 = 1, |y| \leq z\right\}$$

è parametrizzata da

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u, v, \sin u\right) \qquad (u,v) \text{ tali che } -\sin u \leq v \leq \sin u, 0 \leq u \leq \pi$$

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u & 0 & \cos u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\cos u, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u\right) \Rightarrow \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \frac{\sqrt{2\left(\cos^2 + 1\right)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma |x| d\sigma = \int_0^\pi \int_{-\sin u}^{\sin u} \frac{|\cos u|\sqrt{(\cos^2+1)}}{2} du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u \sqrt{\cos^2 u + 1} du \overset{(t=\cos^2 u)}{=}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t+1} dt = \left[\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

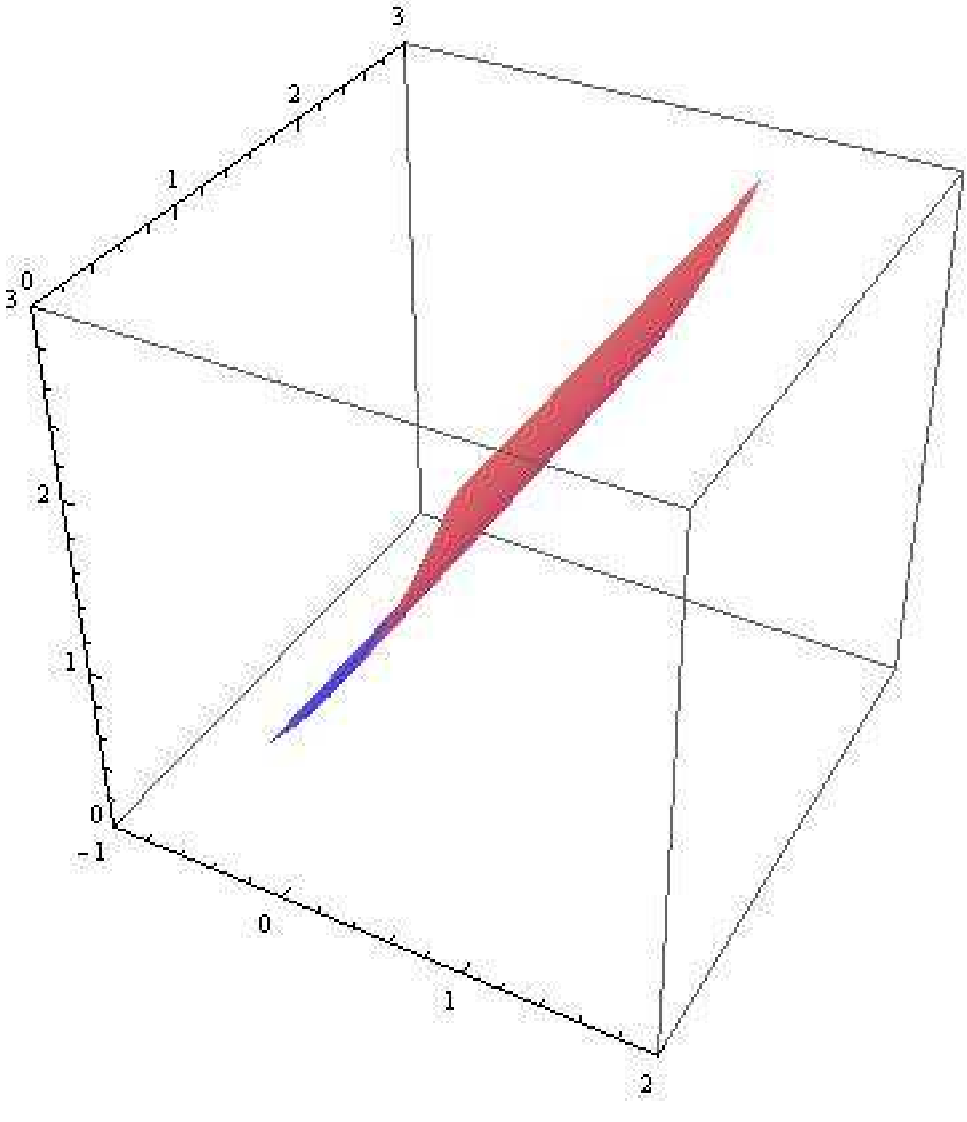


Figure 2: $\Sigma = Im(\Phi)$ con $\Phi(u, v) = (u, v, e^u)$

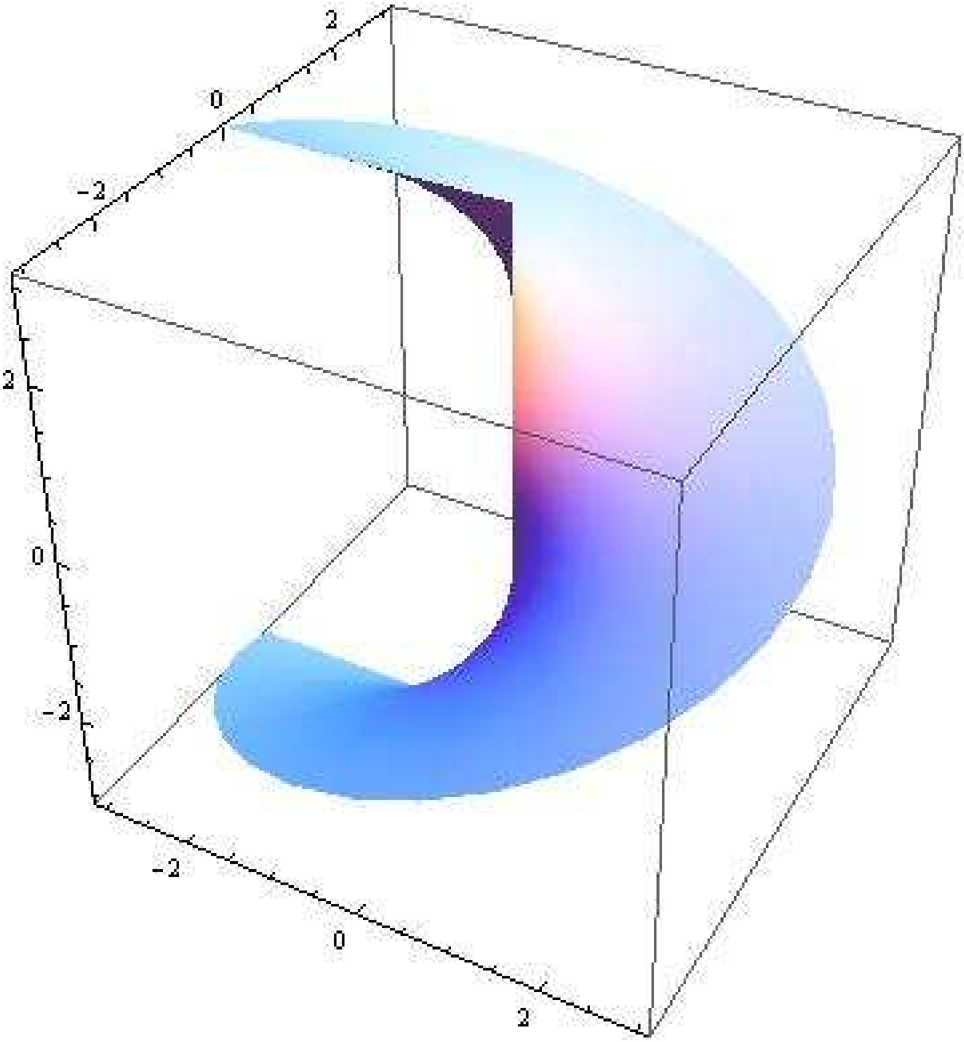


Figure 3: $\Sigma = Im(\Phi)$ con $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$

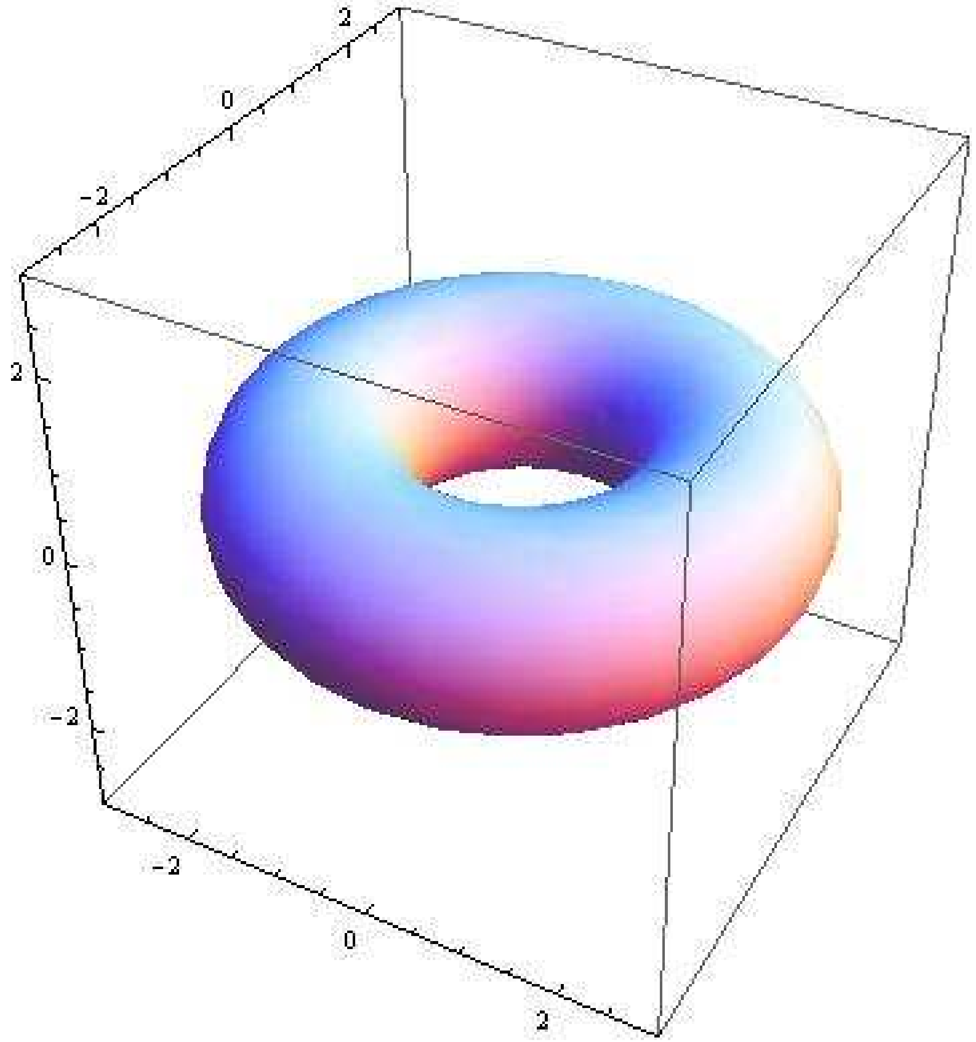


Figure 4: Σ ottenuta ruotando $\gamma(t) = (\cos t + 2, \sin t)$

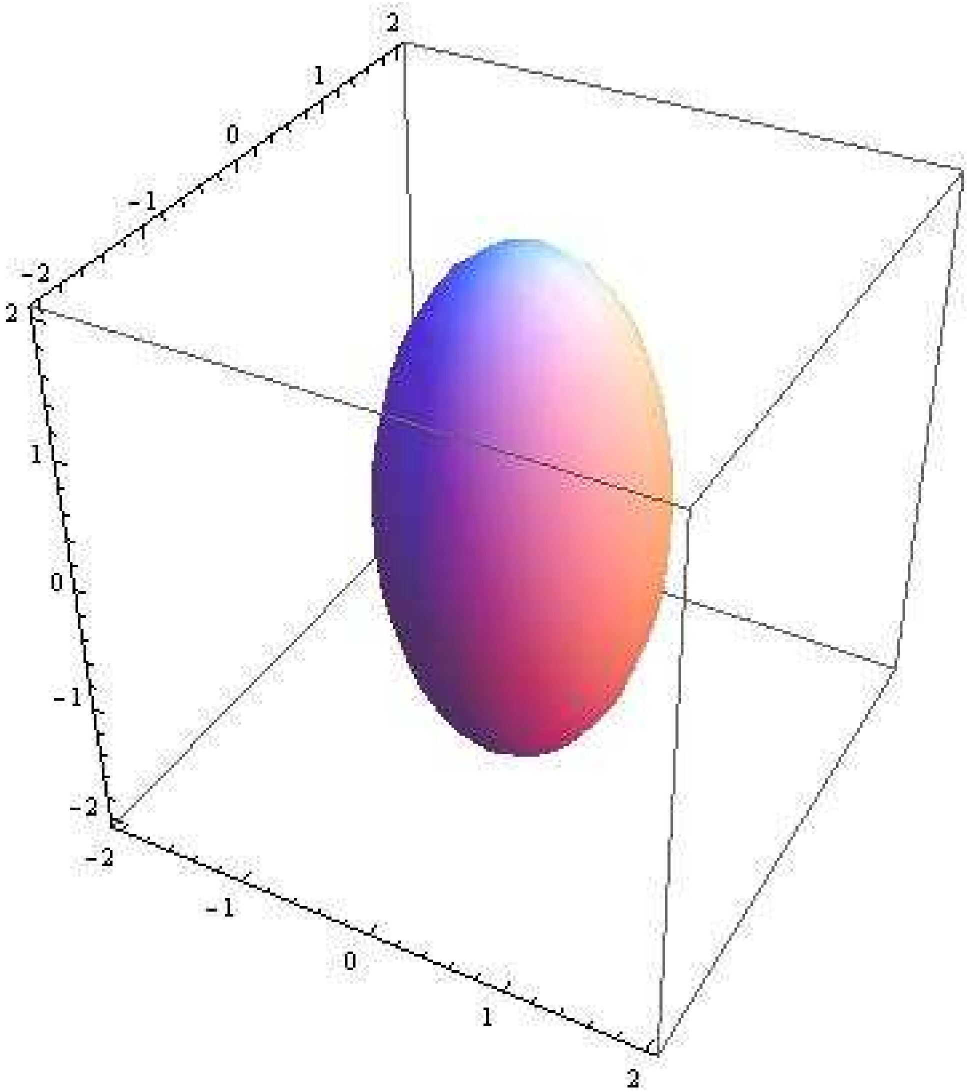


Figure 5: $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \right\}$

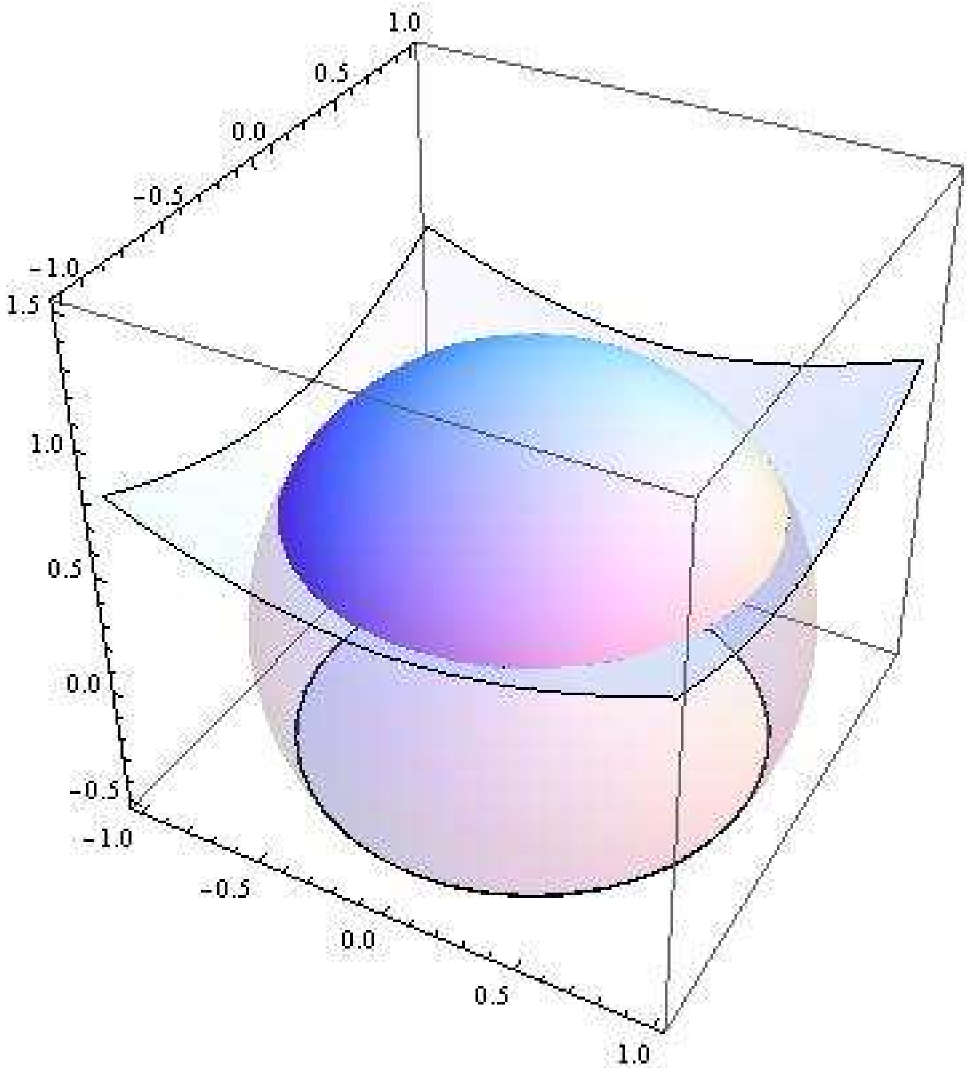


Figure 6: $\Sigma = \partial A$ con $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 3z^2, z \geq 0\right\}$

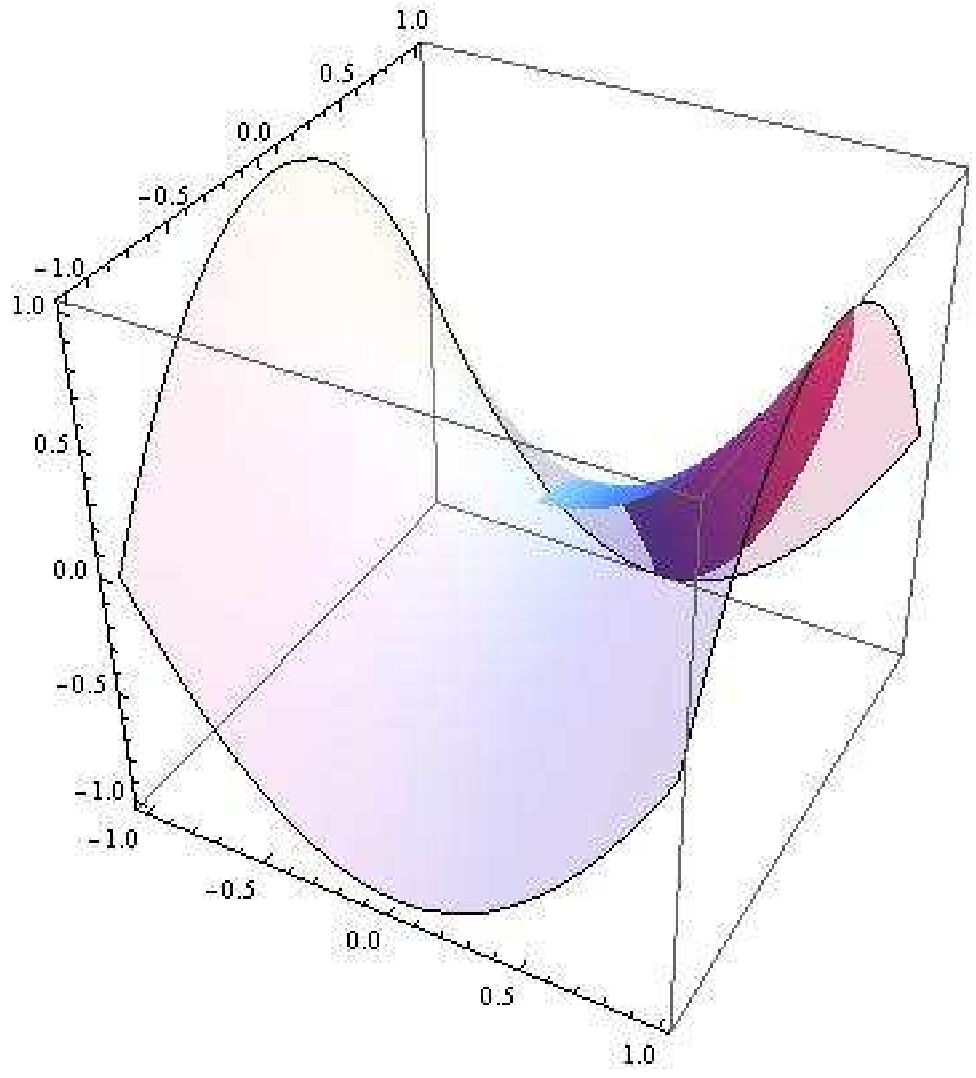


Figure 7: $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y, z = x^2 - y^2\right\}$

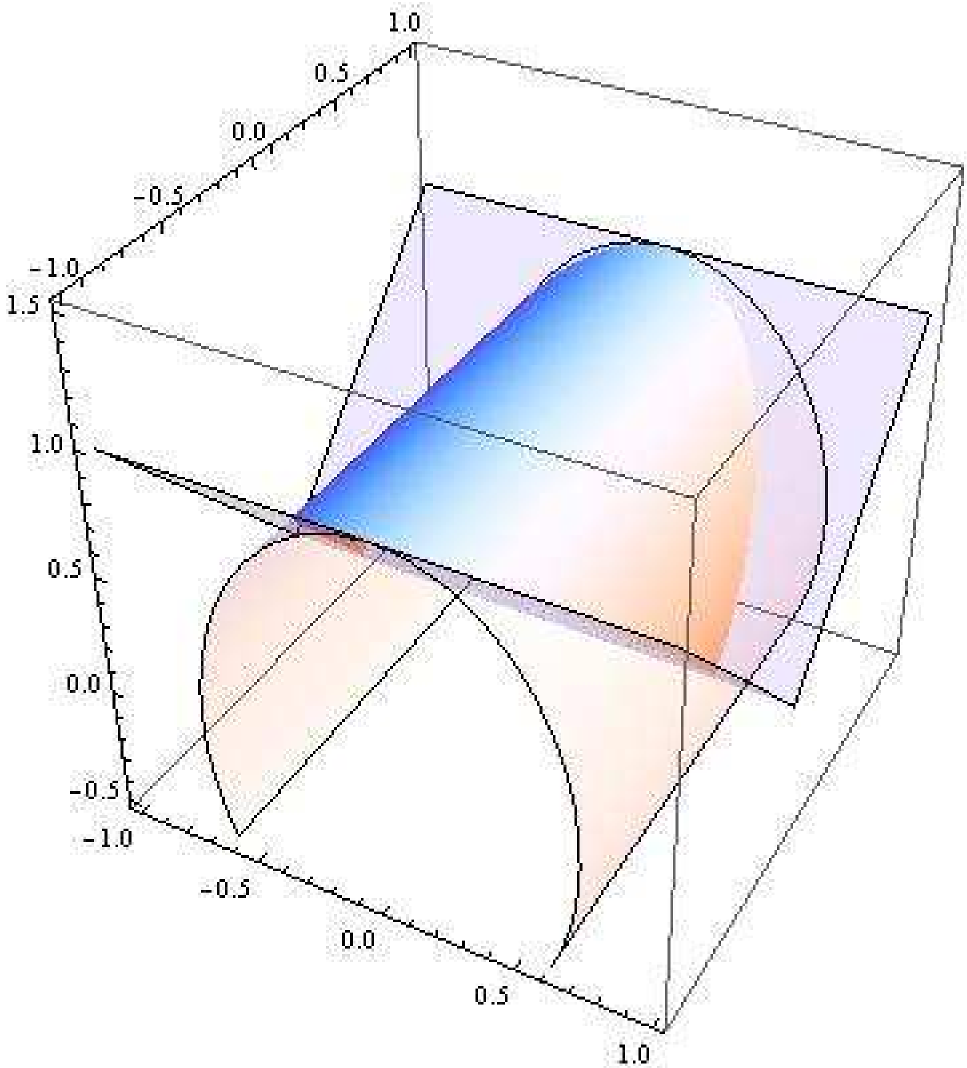


Figure 8: $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + z^2 = 1, |y| \le z\}$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 11 (25 Maggio 2011)

1-forme differenziali

1.

$$\gamma(t) = \left(\sin t, \cos^2 t, \cos t\right) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \omega = xydx + (x+y)dy - zdz$$

$$\int_\gamma \omega =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \omega(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \left(\sin t\cos^2 t, \sin t + \cos^2 t, -\cos t\right), (\cos t, -2\sin t\cos t, -\sin t)\right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t^2\cos t - \sin t\cos^3 t + \sin t\cos t dt = \left[-\frac{\sin^2 t}{3} + \frac{\cos^4 t}{4} + \sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12}$$

2.

$$\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t) \quad t \in [0,\pi] \qquad \omega = dx + \arccos\left(\frac{x}{2}\right)dy$$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^\pi \langle \omega(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_0^\pi \langle (1,t), (-2\sin t, 3\cos t)\rangle dt = -2\int_0^\pi \sin tdt + 3\int_0^\pi t\cos tdt =$$

$$= 2[\cos t]_0^\pi + 3\left([t\sin t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos tdt\right) = -4 + 3\left(\pi + [\sin t]_0^\pi\right) = 3\pi - 4$$

3.

$$\gamma(t) = \left(e^{\sin(\pi t)}, e^{-\cos(\pi t)}, e^{2t-1}\right) \quad t \in [0,1]$$

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2+z^2+1}dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2+1}dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2+1}dz$$

(a) ω è chiusa perché

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2+z^2+1} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2+z^2+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{x^2+y^2+z^2+1} = -\frac{2yz}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{x^2+y^2+z^2+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{x^2+y^2+z^2+1} = -\frac{2xz}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2+1}$$

(b) ω è una forma esatta perché è chiusa e il suo insieme di definizione, cioè $\mathbb{R}^3$, è stellato.
Un potenziale $f(x,y,z)$ per ω è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2+1} \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2+z^2+1} \\ \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y,z) = \int_0^x \frac{t}{t^2+y^2+z^2+1} + a(y,z) = \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2} + a(y,z) \\ f(x,y,z) = \int_0^y \frac{x}{x^2+t^2+z^2+1} + b(x,z) = \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2} + b(x,z) \\ f(x,y,z) = \int_0^z \frac{x}{x^2+y^2+t^2+1} + c(x,y) = \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2} + c(x,y) \end{cases}$$

Affinché sia $a(y,z) = b(x,z) = c(x,y)$, dalla prima uguaglianza si ricava $a(y,z) = b(x,z) = f(z)$, dunque $f(z) = c(x,y) \equiv c$, pertanto affinché si abbia $f(0,0,0) = 0$, dev'essere $c = 0$ e pertanto

$$f(x,y,z) = \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}$$

(c) Essendo V un potenziale per ω, allora

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \log\left(2e^2+2\right) - \log\left(2e^{-2}+2\right) = 2$$

4.

$$\gamma(t) = \left(\sqrt[3]{\cos t}, \sin t\right) \qquad t \in [-\pi,\pi] \qquad \omega = -\frac{3x^2y}{x^6+y^2}dx + \frac{x^3}{x^6+y^2}dy$$

(a) ω è una forma chiusa perché

$$\frac{\partial}{\partial y} - \frac{3x^2y}{x^6+y^2} = \frac{3x^2\left(y^2-x^6\right)}{\left(x^6+y^2\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^3}{x^6+y^2}$$

(b)

$$\int_\gamma \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \langle \omega(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \left(-3\cos^{\frac{2}{3}} t \sin t, \cos t\right), \left(-\frac{\sin t}{3\cos^{\frac{2}{3}} t}, \cos t\right)\right\rangle dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi$$

(c) ω non è una forma esatta perché, se lo fosse, allora il suo integrale lungo qualsiasi curva chiusa sarebbe nullo ma, come è stato appena visto, γ è chiusa e $\int_\gamma \omega \neq 0$

5.

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [-\pi,\pi] \qquad \omega = \cos(x)e^{\arctan y}dx + \left(\frac{\sin(x)e^{\arctan y}}{y^2+1} + x\right)dy$$

Posta $f(x,y) = \sin(x)e^{\arctan y}$, si ha $\omega = df + xdy$, dunque essendo γ chiusa,

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \langle (0, \cos t), (-\sin t, \cos t)\rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} =$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

6.
$$\gamma(t) = \left(t, \log((e-1)t+1), \frac{4}{\pi}\arctan t\right) \qquad t \in [0,1]$$
$$\omega = \left(4xz - 3y^2\right) dx + \left(z^2 - 6xy\right) dy + \left(2yz + 2x^2\right) dz$$
Posta $f(x,y,z) = 2x^2z - 3xy^2 + yz^2$, si ha $\omega = df$, dunque
$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$$

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni
Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 12 (27 Maggio 2011)
Teoremi di Gauss-Green, divergenza, Stokes

1.

$$\omega=\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy\quad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 2,x\ge 0\right\}$$

In coordinate polari, si ha $\Phi^{-1}(A)=\left\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]:\rho\le\sqrt{2},\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}$, dunque

$$\int_A\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_A 2x-2ydxdy=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2(\cos\theta-\sin\theta)d\rho=$$

$$=2[\sin t+\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

mentre $\partial^+A=\gamma_1\cup\gamma_2$ con

$$\gamma_1=\left(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t\right)\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\qquad\gamma_2=\left(0,\sqrt{2}-t\right)\quad t\in\left[0,2\sqrt{2}\right]$$

pertanto

$$\int_{\partial^+A}\omega=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\langle\omega(\gamma_1(t)),\dot{\gamma_1}(t)\rangle dt+\int_0^{2\sqrt{2}}\langle\omega(\gamma_2(t)),\dot{\gamma_2}(t)\rangle dt=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\langle\left(1,2\cos^2t-2\sin^2t\right),\left(-\sqrt{2}\sin t,\sqrt{2}\cos t\right)\right\rangle dt+$$

$$+\int_0^{2\sqrt{2}}\left\langle\left(\left(\sqrt{2}-t\right)^2,-\left(\sqrt{2}-t\right)^2\right),(0,-1)\right\rangle dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\left(1-2\sin^2t\right)-\sin tdt+\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-t\right)^2dt=$$

$$=\sqrt{2}\left[2\sin t-\frac{4}{3}\sin^3t+\cos t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\left(\sqrt{2}-t\right)^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

2.

$$\gamma(t)=\left(\cos^3t,\sin t\right)\quad t\in[-\pi,\pi]$$

Se A è l'insieme racchiuso da γ, dal teorema di Gauss-Green si ha

$$Area(A)=\int_A\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial y}0dxdy=\int_\gamma xdy=\int_{-\pi}^{\pi}\left\langle\left(0,\cos^3t\right),\left(3\cos^2t\sin t,\cos t\right)\right\rangle=$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8} =$$

$$= \left[\frac{3}{8}t + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin(4t)}{32} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{4}\pi$$

3.

$$\omega = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2} dy \qquad \gamma_R = (R\cos t, R\sin t) \quad t \in [-\pi, \pi]$$

(a) ω è chiusa perché

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

(b)

$$\int_{\gamma_R} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \langle \omega(\gamma), \dot{\gamma} \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \langle (R\cos t, R\sin t), (-R\sin t, R\cos t) \rangle dt = 0$$

(c) Per mostrare l'esattezza di ω, è sufficiente far vedere che il suo integrale lungo ogni curva chiusa è nullo e, poiché ogni curva chiusa si decompone in un numero finito di curve semplici, ciò equivale a var vedere che l'integrale si annulla lungo ogni curva semplice chiusa γ; inoltre, poiché cambiando il verso di percorrenza della curva l'integrale cambia segno, si può supporre che γ venga percorsa in senso antiorario; prendendo R sufficientemente largo affinché la circonferenza γ_R non intersechi γ, è possibile applicare il teorema di Gauss-Green all'insieme A racchiuso tra le due curve:

$$0 = \int_A \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_{\partial^+ A} \omega = \int_{\gamma_R} \omega - \int_{\gamma} \omega = -\int_{\gamma} \omega \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$$

4.

$$\omega = -\frac{y^3}{4x^2+y^6} dx + \frac{3xy^2}{4x^2+y^6} dy \qquad \gamma_1(t) = \left(\frac{\cos t}{2}, \sqrt[3]{\sin t} \right) \quad t \in [-\pi, \pi]$$

$$\gamma_2(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t \in [-\pi, \pi]$$

(a) ω è una chiusa perché

$$\frac{\partial}{\partial y} - \frac{y^3}{4x^2+y^6} = \frac{3y^2\left(y^6 - 4x^2\right)}{(4x^2+y^6)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{3xy^2}{4x^2+y^6}$$

(b)

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \langle \omega(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \left(-\sin t, 3\cos t \sin^{\frac{2}{3}} t \right), \left(-\frac{\sin t}{2}, \frac{\cos t}{3\sin^{\frac{2}{3}} t} \right) \right\rangle dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi$$

(c) Poiché $||\gamma(t)|| \leq \sqrt{\frac{1}{4}+1} < 2$, è possibile applicare il teorema di Gauss-Green sull'insieme A racchiuso tra γ_1 e γ_2:

$$0 = \int_A \frac{\partial}{\partial x}\frac{3xy^2}{4x^2+y^6} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{y^3}{4x^2+y^6} dxdy = \int_{\partial^+ A} \omega = \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega - 2\pi \Rightarrow \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi$$

5.

$$F(x,y) = (\sin(\pi x), e^y) \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

$$\int_A divF = \int_A \pi\cos(\pi x) + e^y dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \pi\cos(\pi x)dy + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} e^y dx =$$

$$= \int_0^1 \pi(1-x)\cos(\pi x)dx + \int_0^1 (1-y)e^y dy = [(1-x)\sin(\pi x)]_0^1 + \int_0^1 \sin(\pi x)dx + [(1-y)e^y]_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 e^y dy = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 - 1 + [e^y]_0^1 = \frac{2}{\pi} + e - 2$$

Essendo $\partial^+ A = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_2$ con

$$\gamma_1 = (t,0) \quad t \in [0,1] \qquad \gamma_2 = (1-t,t) \quad t \in [0,1] \qquad \gamma_3 = (0,1-t) \quad t \in [0,1]$$

la normale esterna è rispettivamente

$$\nu_1(t) = (0,-1) \qquad \nu_2(t) = (1,1) \qquad \nu_3(t) = (-1,0)$$

e dunque

$$\int_{\partial^+ A} \left\langle F, \frac{\nu}{\|\nu\|}\right\rangle d\ell = \int_0^1 \left\langle (\sin(\pi t), 1), \frac{(0,-1)}{\|\dot{\gamma_1}(t)\|}\right\rangle \|\dot{\gamma_1}(t)\|dt +$$

$$+ \int_0^1 \left\langle \left(\sin(\pi(1-t)), e^t\right), \frac{(1,1)}{\|\dot{\gamma_2}(t)\|}\right\rangle \|\dot{\gamma_2}(t)\|dt + \int_0^1 \left\langle \left(0, e^{1-t}\right), \frac{(-1,0)}{\|\dot{\gamma_3}(t)\|}\right\rangle \|\dot{\gamma_3}(t)\|dt =$$

$$= \int_0^1 -1 + e^t + \sin(\pi(1-t))dt = \left[-t + e^t - \frac{\cos(\pi(1-t))}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi} + e - 2$$

6.

$$F(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right) \qquad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

In coordinate cilindriche, si ha $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho,\theta,t) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} : \rho \leq z, 0 \leq z \leq 1\}$, dunque

$$\int_A divF = \int_A 2x + 2y + 2zdxdydz = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta + \sin\theta d\theta \int_0^1 dz \int_0^z \rho d\rho +$$

$$+2\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 zdz \int_0^z \rho d\rho = 2[\sin\theta - \cos\theta]_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{z^2}{2}dz + 4\pi \int_0^1 \frac{z^3}{2} = 4\pi \left[\frac{z^4}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Poi, si ha $\partial A = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, con Σ_i parametrizzate da Φ_i

$$\Phi_1(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v) \quad (u,v) \in [-\pi,\pi] \times [0,1]$$

$$\Phi_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 1) \quad (u,v) \in [0,1]\times[-\pi,\pi]$$

dunque, poiché

$$\Phi_{1,u}\wedge\Phi_{1,v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} = (v\cos u, v\sin u, -v)$$

$$\Phi_{2,u}\wedge\Phi_{2,v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (0,0,u)$$

allora si ha

$$\int_{\partial A}\left\langle F, \frac{\nu}{\|\nu\|}\right\rangle d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_0^1 \left\langle \left(v^2\cos^2 u, v^2\sin^2 u, v^2\right), \frac{(v\cos u, v\sin u, -v)}{\|\Phi_{1,u}\wedge\Phi_{1,v}\|}\right\rangle \|\Phi_{1,u}\wedge\Phi_{1,v}\| dv +$$

$$+\int_0^1 du \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle (u\cos v, u\sin v, 1), \frac{(0,0,u)}{\|\Phi_{2,u}\wedge\Phi_{2,v}\|}\right\rangle \|\Phi_{2,u}\wedge\Phi_{2,v}\| dv =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 v + \sin^3 v - 1 dv \int_0^1 u^3 du + 2\pi\int_0^1 udu =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos u\left(1-\sin^2 v\right) + \sin v\left(1-\cos^2 v\right) - 1dv + \pi =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} - \cos v + \frac{\cos^3 v}{3} - v\right]_{-\pi}^{\pi} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

7.
$$\omega = \frac{z}{x+y+z+1}dx + \frac{x}{x+y+z+1}dy + \frac{y}{x+y+z+1}dz$$

$$\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$$

Σ è parametrizzata da

$$\Phi(u,v) = (u, v, 1-u-v) \quad (u,v) \text{ tali che } 0\leq v\leq 1-u, 0\leq u\leq 1$$

con

$$\Phi_u\wedge\Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

mentre

$$rot\omega = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x+y+z+1} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{x+y+z+1}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x+y+z+1} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x+y+z+1},\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x+y+z+1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{x+y+z+1}\right) = \left(\frac{2x+z+1}{(x+y+z+1)^2}, \frac{x+2y+1}{(x+y+z+1)^2}, \frac{y+2z+1}{(x+y+z+1)^2}\right)$$

quindi

$$\int_\Sigma \left\langle rot\omega, \frac{\nu}{\|\nu\|}\right\rangle d\sigma =$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{1-u} \left\langle \left(\frac{u-v+2}{4}, \frac{u+2v+1}{4}, \frac{-2u-v+3}{4} \right), \frac{(1,1,1)}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} \right\rangle \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dv =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv = \frac{3}{2} \int_0^1 1 - u du = \frac{3}{2} \left[-\frac{(1-u)}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

Si ha poi $\partial^+ A = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ con

$$\gamma_1(t) = (1-t, t, 0) \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (t, 0, 1-t) \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (0, 1-t, t) \quad t \in [0,1]$$

pertanto

$$\int_{\partial^+ A} \omega = \int_0^1 \langle \omega(\gamma_1(t)), \dot{\gamma_1}(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle \omega(\gamma_2(t)), \dot{\gamma_2}(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle \omega(\gamma_3(t)), \dot{\gamma_3}(t) \rangle dt =$$

$$= \int_0^1 \left\langle \left(0, \frac{1-t}{2}, \frac{t}{2} \right), (-1,1,0) \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle \left(\frac{1-t}{2}, \frac{t}{2}, 0 \right), (1,0,-1) \right\rangle dt +$$

$$+ \int_0^1 \left\langle \left(\frac{t}{2}, 0, \frac{1-t}{2} \right), (0,-1,1) \right\rangle dt = 3 \int_0^1 \frac{1-t}{2} dt = 3 \left[-\frac{(1-t)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

8.

$$\omega = xy^2 dy + xz^2 dz \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Una superficie chiusa Σ avente per bordo γ è il disco unitario contenuto nel piano xy, parametrizzato da

$$\Phi(u,v) = (u \cos v, u \sin v, 0) \quad (u,v) \in [0,1] \times [-\pi, \pi]$$

Poiché si ha

$$rot\omega = \left(\frac{\partial}{\partial y} xz^2 - \frac{\partial}{\partial z} xy^2, \frac{\partial}{\partial z} 0 - \frac{\partial}{\partial x} xz^2, \frac{\partial}{\partial x} xy^2 - \frac{\partial}{\partial y} 0 \right) = \left(0, -z^2, y^2 \right)$$

e

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (0,0,u)$$

allora

$$\int_A \left\langle rot\omega, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right\rangle d\sigma = \int_0^1 du \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \left(0, 0, u^2 \sin^2 v \right), \frac{(0,0,u)}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} \right\rangle \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dv =$$

$$= \int_0^1 u^3 du \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 v dv = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2v)}{2} dv = \frac{1}{4} \left[\frac{v}{2} - \frac{\sin(2v)}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

mentre

$$\int_{\partial^+ A} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \langle \omega(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \left(0, \cos t \sin^2 t, 0 \right), (-\sin t, \cos t, 0) \right\rangle dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(2t)}{4} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(4t)}{8} dt = \left[\frac{t}{8} - \frac{\sin(2t)}{32} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$