AM310 - Istituzioni di analisi superiore

Luca Battaglia

Esercizi su misure prodotto e misure di Radon

Esercizio 1.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *fissati e* $f_n = n^a \chi_{[n,n+n^b]}$.

1. *Dimostrare che* $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *m-q.o..*
2. *Dire per quali* a, b *si ha* $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *in media.*
3. *Dire per quali* a, b *si ha* $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *in misura.*

Esercizio 2.
Sia, per $k, l \in \mathbb{N}$, $a(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ -\frac{1}{2^{k-l}} & \text{se } k > l \\ 0 & \text{se } k < l \end{cases}$.

1. *Calcolare, per* l *fissato,* $\sum_{k=1}^{\infty} a(k,l)$ *e, per* k *fissato,* $\sum_{l=1}^{\infty} a(k,l)$.
2. *Calcolare* $\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a(k,l)$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a(k,l)$ *e mostrare che sono due valori finiti ma differenti.*
3. *Dimostrare che* $\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a(k,l)| = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a(k,l)| = +\infty$ *e confrontare con quanto visto a lezione.*

Esercizio 3.
Sia $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *una matrice simmetrica definita positiva.*

1. *Utilizzando il teorema spettrale, trovare un cambio di variabile lineare* $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *tale che* $\langle A(Ty), Ty\rangle = |y|^2$ *per ogni* $y \in \mathbb{R}^N$.
2. *Dimostrare che l'insieme* $E := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \langle Ax, x\rangle \le 1\right\}$ *ha misura pari a* $m(E) = \frac{m(\mathbb{B})}{\sqrt{\det A}}$, *dove* $B := \{y \in \mathbb{R}^N : |y|^2 \le 1\}$ *è la palla unità.*
3. *Calcolare* $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx$.

Esercizio 4.
Sia, per $n \in \mathbb{N}$, $L_n \in C([-1,1])^*$ *definito da:*

$$L_n f = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx - \frac{1}{n}\int_{-1}^{0} f(x)dx.$$

1. *Utilizzando il Teorema di Riesz, calcolare esplicitamente la norma* $\|L_n\|_{C([-1,1])^*} = \sup_{-1\leq f\leq 1} |L_n f|$.

2. *Dimostrare che non esiste nessuna* $f \in C([-1,1])$ *tale che* $-1 \leq f \leq 1$ *e* $L_n f = \|L_n\|_{C([-1,1])^*}$.

3. *Trovare una misura con segno di Radon* μ *tale che* $L_n f \underset{n\to\infty}{\to} \int_{-1}^{1} f d\mu$.