**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 1 (26 Settembre 2008)
Successioni di funzioni

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = e^{-nx}$

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$

   (c) $f_n(x) = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}$

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$

   (e) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$

   (f) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (g) $f_n(x) = \arctan\left(n^2 - x\right)$

   (h) $f_n(x) = \int_{-nx^2}^{nx^2} e^{-t^2}dt$

   (i) $f_n(x) = \sin\left(\pi nx^2\right)e^{-nx^2}$

2. Sia $f_n(x) = \frac{\arctan\frac{x}{n}}{n}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ ,stabilire se $f_n(x)$ e $f_n'(x)$ convergono uniformemente e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.
   Ripetere l'esercizio per $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

3. Calcolare:

   (a) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n\sin x\cos x}{n+x}dx$

   (b) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2}dx$

   (c) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}dx$

   (d) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+x}dx$ *(Suggerimento: integrare per parti)*

4. Sia $f_n$ una successione di funzioni di classe $C^1$ tali che $f_n(0)$ è limitata. Provare che se $f_n'$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente in $[-1,1]$, allora $f_n$ ha anch'essa una sottosuccessione uniformemente convergente in $[-1,1]$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 2 (3 Ottobre 2008)
Serie di funzioni, serie di potenze

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n^2 x\right) e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{x^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \arctan(nx)$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(nx)}{n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+n^2x^2}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4t^2} dt$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(3+(-1)^n\right)^n x^n$

3. Calcolare:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n n^x} dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1} dx$

4. Provare che $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ è una funzione ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e stabilire per quali $x$ è derivabile.

5. Dare un esempio, ove possibile, di una serie di funzioni che su tutto $\mathbb{R}$ converga:

   (a) Puntualmente e uniformemente ma non assolutamente né totalmente.
   (b) Puntualmente, uniformemente e totalmente ma non assolutamente.
   (c) Puntualmente e assolutamente ma non uniformemente né totalmente.
   (d) Puntualmente, assolutamente e totalmente ma non uniformemente.
   (e) Puntualmente ma non assolutamente né uniformemente né totalmente.
   (f) Puntualmente, assolutamente, uniformemente ma non totalmente.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 3 (10 Ottobre 2008)
Sviluppi in serie di Taylor, serie di potenze

1. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^5 x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} x^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2} x^n$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}-3\right)^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 3^n}$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\log n} x^n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2^{3n}+3^{2n}\right) x^n$

(j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(4x)^n}$

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} e^{t^2} dt$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$

2. Sviluppare in serie di Taylor nell'origine le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \log\left(1-x^3\right)$

(b) $f(x) = \frac{1}{x+10}$

(c) $f(x) = e^{x^2-1}$

(d) $f(x) = \frac{\arctan\left(x^5\right)}{x^5}$

3. Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!2^{2n+1}}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$

4. Esprimere i seguenti integrali come somma di una serie numerica:

(a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

TUTORATO NUMERO 4 (17 OTTOBRE 2008)

FUNZIONI ANALITICHE, VARIABILI COMPLESSE, SERIE DI FOURIER

1. Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi:

   (a) $\log(-4)$

   (b) $\log\left(1+\sqrt{3}i\right)$

   (c) $\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3\pi i)^n}{n!}\right)$

   (d) $\sqrt[3]{1+i}$

   (e) $(3i)^{\sqrt{2}}$

   (f) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1-i}{1+i}}$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze complesse e discuterne il comportamento sul bordo del disco di convergenza:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos n + i\sin n)z^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2\,(2i)^n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2i)^n}{n!}z^n$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\cosh(in)z^n$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty}(\arctan n)^n z^n$

3. Sviluppare le seguenti funzioni in serie di Fourier:

   (a) $f(x)=\sin x\cos x$

   (b) $f(x)=x^2$

   (c) $f(x)=e^x$

   Dedurre dal punto b che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4. Utilizzando la somma della serie geometrica e le Formule di Eulero, provare che $\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos(nx)=\frac{1-r\cos x}{r^2-2r\cos x+1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} r^n\sin(nx)=\frac{r\sin x}{r^2-2r\cos x+1}$ $\forall r\in(0,1)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

5. Siano $f$ e $g$ due funzioni analitiche sull'intervallo $(a,b)$. Provare che se $f(x)g(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$, allora o $f(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$ oppure $g(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$. Mostrare, con un controesempio, che ciò può non essere vero se $f$ e $g$ sono solamente di classe $C^\infty$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 5 (24 Ottobre 2008)

Limiti in più variabili, ripasso

1. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(d) $\displaystyle\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+\left(x^2+y^2\right)\cos\left(x^4+y^7\right)}{x^2+y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^4}$

2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

3. Discutere al variare del parametro $\alpha>0$ la continuità della funzione $f(x,y)=\begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

4. Sia $f_n(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{\sqrt{t+x}}dt$; calcolare, effettuando un cambio di variabile ed una integrazione per parti, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e stabilire se la convergenza è uniforme.

5. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\left(2^n+3^n\right)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-i^n\right)^n z^n$

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato straordinario (30 Ottobre 2008)
Esercizi tipo esonero

1. Discutere la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{n^4+x^4}$ *(Appello di Gennaio - A.A. 01-02)*

   (b) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ *(I esonero - A.A. 06-07)*

2. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x\sin n)^n}{n}$ *(Recupero I esonero - A.A. 03-04)*

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$ *(Recupero I esonero - A.A. 03-04)*

3. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze reali e determinare il comportamento sul bordo:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+\sin^2 n}$ *(I esonero - A.A. 03-04)*

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n$ *(I esonero - A.A. 03-04)*

4. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze complesse e determinare il comportamento sul bordo:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(2-i^n\right)^n z^n$ *(Appello B - A.A. 06-07)*

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos e^{-n}\right)^n z^n$ *(I esonero - A.A. 07-08)*

5. Discutere la continuità della funzione $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2y^{\frac{1}{7}}z^2}{x^4+y^4+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

   *(Recupero I esonero - A.A. 06-07)*

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

TUTORATO NUMERO 6 (31 OTTOBRE 2008)
LIMITI IN PIÙ VARIABILI, RIPASSO

1. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz^{\frac{2}{3}}}{\left(x^4+y^2+z^4\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|xy|)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} & \text{se } x \neq y \\ e^{-xy} & \text{se } x = y \end{cases}$

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz^3}{x^6+y^2+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

3. Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ la continuità della funzione
   $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(7x^8+2y^4)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$ (b) $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$ (c) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

5. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xn)^n}{x^n+n^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}$

6. Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = i$

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato straordinario 2 (6 Novembre 2008)
Esercizi tipo esonero

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme di $f_n(x) = (\sin x)^{2n}$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ e sui suoi sottointervalli. *(Appello di Gennaio - A.A. 01-02)*

2. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e determinare il comportamento sul bordo:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(2^n+1)}$ *(I esonero - A.A. 03-04)*

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2+\cos n}$ *(I esonero - A.A. 03-04)*

3. Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = -1$

   *(Recupero I esonero - A.A. 03-04)*

4. Sia $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y^3)}{x^2+y^6}$. Calcolare $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to 0} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)$. *(I esonero - A.A. 06-07)*

5. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *(II esonero - A.A. 03-04)*

   (b) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz^{\frac{4}{3}}}{(x^4+y^2+z^4)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ *(II esonero - A.A. 06-07)*

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 7 (7 Novembre 2008)
Limiti in più variabili, ripasso

1. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan\left(x^3y^2\right)}{x^4+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\pi + 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{y^2}{2\pi} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{|yz|}}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

2. Provare che $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{nx} e^{-t^2} dt$ è ben definita $\forall x \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali $x$ e continua e per quali è derivabile.

3. Discutere, al variare del parametro reale $\alpha$, la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n^\alpha x\right)}{x\left(1+n^2x^2\right)}$, provare che $\int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(n^\alpha x\right)\right|}{x\left(1+n^2x^2\right)} dx < +\infty \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e che $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(n^\alpha x\right)\right|}{x\left(1+n^2x^2\right)} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 0$

4. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$. Provare che $f$ ha almeno un punto di massimo assoluto. Mostrare infine che la funzione $f(x,y) = \frac{\sin\left(e^{-x^4}\right)}{1+x^2+y^2+\arctan\left(1+y^6\right)}$ verifica le ipotesi richieste e calcolare il suo massimo.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 8 (21 Novembre 2008)
Derivazione in più variabili

1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log\left(1+x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z^2}{x^2+y^4+z^6} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

   (f) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2. Stabilire se le seguenti funzioni possono essere estese a funzioni di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^6+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$

3. Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità nell'origine della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{(x^6+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

   (a) Continua, derivabile in ogni direzione ma non parzialmente derivabile.

   (b) Continua, parzialmente derivabile ma derivabile non in tutte le direzioni.

   (c) Continua ma non parzialmente derivabile e derivabile non in tutte le direzioni.

   (d) Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione ma discontinua.

   (e) Parzialmente derivabile ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.

   (f) Derivabile in ogni direzione ma discontinua e non parzialmente derivabile.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 9 (28 Novembre 2008)
Massimi e minimi in più variabili, formula di Taylor

1. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$

   (b) $f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy - x^2y^2$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2y^3}{3} - 4x^2 - y^2 + 2xy^2 + 2xy - x^2y$

   (d) $f(x,y) = (x+y)(y+1)^2$

   (e) $f(x,y) = x^4 + y^2 e^{y+2x^2}$

   (f) $f(x,y) = x^3 - x^2 \cos y$

   (g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2 + x^4$

   (h) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$

2. Determinare l'estremo superiore e inferiore su tutto $\mathbb{R}^2$ delle seguenti funzioni e stabilire se si tratta di massimi e/o di minimi.

   (a) $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$  (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + y^4 + 3}$

3. Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nell'origine delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \cos x \sin y$  (b) $f(x,y) = \log\left(1 + x + y^2\right)$

4. Provare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $C^2$.

5. Discutere la continuità, l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 10 (5 Dicembre 2008)

Integrali dipendenti da parametro, massimi e minimi vincolati

1. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \tan\left(t^2\right) dt$.

2. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} e^{-x^6 t^2} dt$.

3. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 e^{-\left(x^2+y^2\right)t^2} dt$, specificando quali di essi sono punti di massimo locale e quali di minimo locale.

4. Sia $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx) dx$. Provare che:
   (a) $f \in C(\mathbb{R})$
   (b) $f \in C^1(\mathbb{R})$
   (c) $f'(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2} f(t)$

5. Sia $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx$:
   (a) Determinare l'insieme di definizione di $f$
   (b) Provare che $f$ è di classe $C^1$ e calcolarne la derivata
   (c) Trovare un'altra espressione per $f$ in cui non compaiono integrali

6. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f$ sull'insieme $A$:
   (a) $f(x,y) = x - y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 2\}$
   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{y - 3x + 3}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$
   (c) $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq 9\}$
   (d) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$

7. Determinare i punti dell'ellissoide $2x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 1 = 0$ che distano meno dall'origine.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 11 (12 Dicembre 2008)
Equazioni differenziali, massimi e minimi vincolati

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 4x \\ x(0) = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} + x = \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \dot{x} = xe^{tx} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dot{x} = 2xt^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} - tx = 2t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dot{x} = t^2x^4 \\ x(1) = 2 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{x} \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

2. Provare che il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ammette un'unica soluzione $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$, e determinare tale soluzione esplicitamente. Mostrare inoltre che per $\alpha \in (0,1)$ esistono infinite soluzioni.

3. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{y^2} e^{t^2} dt$ sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

4. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = x + y + z$ sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

5. Sia $X = (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Provare che la mappa $T : X \to X$ definita come $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^1 ye^{-x^2y^2} f(y)dy$ è una contrazione.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Tutorato numero 12 (16 Dicembre 2008)
Equazioni differenziali, ripasso

1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

   (a) $\ddddot{x} - 4x = 0$

   (b) $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x} - 2\ddddot{x} + \dddot{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0$

   (c) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{2t}$

   (d) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = 4t$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} \dddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 1 \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \ddot{x} + 4x = \sin t \\ \dot{x}(0) = -\frac{2}{3} \\ x(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} \dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = e^t \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\dddot{x} - x = e^{-t}$ tali che $x(0) = 0 = \lim_{t \to +\infty} x(t)$.

4. Determinare i punti di equilibrio dei seguenti problemi di Cauchy, discuterne al variare del dato iniziale $x_0$ l'unicità locale e globale e, in caso di unicità, determinare l'intervallo massimale di esistenza:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} \left(x^3 - x\right) \log |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

5. Studiare la continuità, l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità della funzione $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz}{x^4+y^2+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

6. Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = 3x^5 - 5x^3 + 2y^2$ e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 1 (25 Settembre 2009)
Limiti e continuità in più variabili

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x^3y|}}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^8+y^6}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^4}{x^4+y^8} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Dimostrare che $\forall\, x, y, \in \mathbb{R}^n$ si ha $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

4. Provare che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ per ogni aperto $A$ di $\mathbb{R}^m$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 2 (2 Ottobre 2009)
Limiti e continuità in più variabili

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$

   (b) $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\sin(x+y)}{x^4+y^2}$

   (c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^4+z^2}$

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2y^3)}{x^6+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz}{(x^4+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^4+z^2}} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3\log(x^2+y^4)}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{t^2}\,dt}{y-x} & \text{se } x \neq y \\ e^{xy} & \text{se } x = y \end{cases}$

3. Discutere, al variare dei parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta > 0$, la continuità della funzione $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{|x_1|^{\alpha_1} \ldots |x_n|^{\alpha_n}}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\beta}}$.

4. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una funzione tale che $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = L$ con $-\infty < L < \infty$.

   (a) Provare che $f$ ha un massimo o un minimo.

   (b) Provare che $f$ è uniformemente continua.

5. Sia $f(x,y) = \frac{e^{\cos(x^3)}}{2+x^2+y^2+\arctan(x^4+y^4)}$. Provare che $f$ ha un massimo ma non un minimo e calcolare $\inf_{\mathbb{R}^n} f$ e $\max_{\mathbb{R}^n} f$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

TUTORATO NUMERO 3 (9 OTTOBRE 2009)
DERIVAZIONE IN PIÙ VARIABILI

1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{x^8+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz^2}{x^4+y^4+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

2. Stabilire se le seguenti funzioni possono essere estese a funzioni di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$  (b) $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^2+y^6}$

3. Siano $f(x,y) = x^2e^{xy^3}$ e $\gamma(t) = (\cos t, t)$. Verificare che $\dfrac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$

4. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

   (a) Continua, derivabile in ogni direzione ma non parzialmente derivabile.

   (b) Continua, parzialmente derivabile ma derivabile non in tutte le direzioni.

   (c) Continua ma non parzialmente derivabile e derivabile non in tutte le direzioni.

   (d) Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione ma discontinua.

   (e) Parzialmente derivabile ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.

   (f) Derivabile in ogni direzione ma discontinua e non parzialmente derivabile.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 4 (16 Ottobre 2009)
Massimi e minimi in più variabili

1. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale:

   (a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$

   (b) $f(x,y) = xy\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

   (c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

   (d) $f(x,y) = x^4 - x^3 \sin y$

   (e) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$

2. Determinare l'estremo superiore e inferiore su tutto $\mathbb{R}^2$ delle seguenti funzioni e stabilire se si tratta di massimi e/o di minimi.

   (a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2$ (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^4 + y^2 + 2y + 2}$

3. Discutere la continuità, la differenziabilità e l'esistenza di derivate parziali e differenziali delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0) \end{cases}$

4. Provare, usando il lemma di Schwartz, che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $C^2$.

5. Provare, usando la regola di derivazione per funzioni composte, che
$\nabla f = \left(\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial \rho} - \dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}, \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial \rho} + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) \ \forall f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 5 (23 Ottobre 2009)
Massimi e minimi, formula di Taylor, integrali con parametro

1. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale:
   (a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2x^2y^2$
   (b) $f(x,y) = (x+y)^2(y-2)$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2$
   (d) $f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 e^{\left(x^2+y^2\right)t^2} dt$

2. Determinare il massimo e il minimo valore della funzione $f(x,y) = \left(x^2-1\right)^2 - y^2$ sull'insieme $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nell'origine delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x,y) = e^{x^2-y}$
   (b) $f(x,y) = \arctan(x+y)$

4. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:
   (a) $f(t) = \displaystyle\int_{t^2}^{t^4} \sin\left(x^2\right) dx$
   (b) $f(t) = \displaystyle\int_t^{t^3} e^{-x^2t^2} dx$

5. Sia $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx$:
   (a) Determinare l'insieme di definizione di $f$.
   (b) Provare che $f$ è di classe $C^1$ e calcolarne la derivata.
   (c) Trovare un'altra espressione per $f$ in cui non compaiono integrali.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 6 (30 Ottobre 2009)
Serie di potenze, ripasso

1. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^{10}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n} x^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^n x^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n x^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n(n+2)}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n+4^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right) x^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4\log n}}{x^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$

2. Sia $f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}$. Calcolare, se esistono, $\lim_{x^2+y^2\to 0} f(x,y)$ e $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)$.

3. Discutere la continuità, la differenziabilità e l'esistenza di derivate parziali e direzionali della funzione $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2y^{\frac{6}{7}}z}{x^4+y^4+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

4. Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = \left(x^2-y^2\right)^2\left(y-x^2\right)$, specificando quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale.

5. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della successioni di funzioni $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 7 (13 Novembre 2009)
Successioni di funzioni, serie di funzioni

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2+1}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$

   (d) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (e) $f_n(x) = \cos^n x$

   (f) $f_n(x) = \dfrac{\sin\left(n^2x^2\right)}{n^2x^2+1}$

2. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{x^2+n^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2+1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n + \log(\log n)}$

3. Calcolare:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2}dx$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi nx)}{n^2+n}dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n n^x}dx$

4. Sia $f_n(x) = xe^{-2n^2x^2}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, stabilire se $f_n$ e $f_n'$ convergono uniformemente e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

5. Provare che $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2}$ è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e stabilire per quali $x$ è derivabile.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 8 (20 Novembre 2009)
Serie di potenze, serie di Taylor, serie complesse

1. Sviluppare in serie di Taylor nell'origine le seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$  (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$  (c) $f(x) = x\cosh\left(x^2\right)$

2. Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$

3. Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi:

   (a) $\log(-3)$  (b) $\log\left(\sqrt{3}+i^3\right)$  (c) $\log\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\pi^n}{n!}\right)$  (d) $i^i$

4. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo del disco di convergenza:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{i^n n^2}$  (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i-1)^n}{n!} z^n$  (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(in) z^n$

5. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{nx^4+n^3}$  (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$  (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x x^n$

6. Calcolare:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{ne^x \arctan(nx)}{n^2x^2+1} dx$  (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx$

7. Dare un esempio, ove possibile, di una serie di funzioni che su tutto $\mathbb{R}$ converga:

   (a) Puntualmente e uniformemente ma non assolutamente né totalmente.

   (b) Puntualmente, uniformemente e totalmente ma non assolutamente.

(c) Puntualmente e assolutamente ma non uniformemente né totalmente.

(d) Puntualmente, assolutamente e totalmente ma non uniformemente.

(e) Puntualmente ma non assolutamente né uniformemente né totalmente.

(f) Puntualmente, assolutamente, uniformemente ma non totalmente.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 9 (27 Novembre 2009)
Numeri complessi, spazi metrici, contrazioni

1. Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi:

   (a) $\log(2i-2)$ (b) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ (c) $i^{\frac{2}{\pi}}$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo del disco di convergenza:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2+\exp(in)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n$

3. Calcolare:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\log 3}{2}} \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}dx$

4. Sia $X = C^1([-1,1])$ lo spazio delle funzioni di classe $C^1$:

   (a) Provare che $\|f\| := \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ è una norma su $X$.

   (b) Provare che $T : X \to \mathbb{R}$ definita come $T(f) = f'(0)$ è un'applicazione lineare.

   (c) Siano $f_n = \dfrac{\arctan(nx)}{n} \in X$: mostrare che $\|f_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$ ma $|T(f_n)| \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} T(0) = 0$. Dedurne che in generale non tutte le applicazioni lineari sono continue.

5. Sia $X$ lo spazio delle successioni reali:

   (a) Provare che $\forall x \in X, p \geq 1$ si ha che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$, dedurne che $\ell^p \subset \ell^\infty\ \forall p \geq 1$.

   (b) Provare che l'inclusione precedente è stretta, ovvero trovare $x \in \ell^\infty \setminus \bigcup_{p\geq 1} \ell^p$.

   (c) Provare che $\forall x \in X, p \geq q \geq 1$ si ha che $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ e dedurne che $\ell^q \subset \ell^p\ \forall p \geq q \geq 1$.

   (d) Provare che l'inclusione precedente è stretta, cioè fissato $q \geq 1$ trovare $x \in X$ tale che $x \in \bigcap_{p>q} \ell^p \setminus \ell^q$.

   (e) Sia $c_0 = \{x \in \ell^\infty | x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0\}$. Provare che $\ell^p \subset c_0\ \forall p \geq 1$ e che tale inclusione è stretta, ovvero trovare $x \in X$ tale che $x \in c_0 \setminus \bigcup_{p\geq 1} \ell^p$.

6. Sia $X = C([0,1], \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue dotato della norma $\| \cdot \|_\infty$. Provare che $\Phi : X \to X$ definita come $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 y e^{-xy} f(y) dy$ è una contrazione in $X$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 10 (4 Dicembre 2009)
Equazioni differenziali, contrazioni

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = \pi x \\ x(0) = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = t^2 x^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \dot{x} = x - \arctan t + \frac{1}{t^2+1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 4 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dot{x} = x \sin t + \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2 x \\ x(1) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dot{x} = \cos x \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x}^2 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

2. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali, discutendo l'eventuale parametro:

(a) $\dddot{x} - x = 0$

(b) $\dddot{x} + 6\ddot{x} + 9x = 0$

(c) $\dddot{x} - \ddot{x} - \alpha\dot{x} + \alpha x = 0$

3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

(a) $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \\ \dot{x}(0) = 5 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dddot{x} + \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \ddddot{x} - 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 4 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

4. Provare che il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$, e determinare esplicitamente tale soluzione; per $\alpha \in (0,1)$ esibire almeno tre soluzioni distinte.

5. Sia $X = C([0,1], \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$. Provare che $\Phi : X \to X$ definita come $\Phi(f)(x) = \int_0^1 (xy)^\alpha f(y)dy$ è una contrazione in $X$ $\forall \alpha > 0$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 11 (11 Dicembre 2009)
Equazioni differenziali, ripasso

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^3+t^2} \arctan x \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + t \log t \\ x(1) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = \sin x \cos x \sin^2 t \cos t \\ x(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

(a) $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \ddot{x} - 6\dot{x} + 10x = 0 \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dddot{x} + 8x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2\sqrt{3} \\ \dot{x}(0) = \sqrt{3} \\ x(0) = 3 \end{cases}$

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\dddot{x} - x = 0$ tali che $x(0) = 0 = \lim_{t \to +\infty} x(t)$.

4. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema $\begin{cases} \ddot{x} + \alpha x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$ ammette soluzioni non banali, e per tali $\alpha$ determinare queste soluzioni.

5. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = y(x+y)^n \\ \dot{y} = x(x+y)^n \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

*(Suggerimento: si consideri il cambio di variabile* $\begin{cases} w = x + y \\ z = x - y \end{cases}$ *)*

6. Calcolare:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx$

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 12 (18 Dicembre 2009)
Equazioni differenziali

1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

   (a) $\ddot{x} + x = e^t$

   (b) $\dddot{x} - 2\dot{x} - 4x = 1$

   (c) $\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = e^t$

   (d) $\ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = t \sin t$

2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

   (a) $\begin{cases} \ddot{x} + 3x = \cos(3t) \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = e^{-3t} \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 6e^{4t} \\ \ddot{x}(0) = 30 \\ \dot{x}(0) = 10 \\ x(0) = 4 \end{cases}$

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy al variare del dato iniziale $x_0$, determinando l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

4. Determinare i punti di equilibrio dei seguenti problemi di Cauchy e dire per quali dati iniziali $x_0$ la soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = |x| \arctan(e^x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

5. Si consideri il sistema gradiente $(\dot{x}, \dot{y}) = -\nabla F(x, y)$, con $F \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ inferiormente limitata.

   (a) Provare che $\lim_{t \to +\infty} \|\nabla F(x(t), y(t))\| = 0$.

   (b) Trovare $F$ tale che il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y \\ \dot{y} = -2x - 4y \end{cases}$ può essere scritto in questa forma.

   (c) Mostrare che in questo caso $(x(t), y(t)) \overset{t \to +\infty}{\to} (0, 0)$ per qualsiasi dato iniziale.

6. Dato il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(x^2 + y^2 - 2\right) \\ \dot{y} = -4x\left(x^2 + y^2 - 2\right) \end{cases}$ determinare i punti di equilibrio, trovare una costante del moto e disegnare le traiettorie.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

TUTORATO NUMERO 1 (28 SETTEMBRE 2010)
LIMITI E CONTINUITÀ IN PIÙ VARIABILI

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$.

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^8+y^2}$.

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x^2+2y^2}-1}{x^2+y^2}$.

2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy^3|}}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^3 y)}{\sqrt{x^8+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2 y - y)}{(x-1)^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$.

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \log\left(\frac{(x+y^2)^2}{x^2+y^4}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

3. Mostrare che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $\langle x, y \rangle = 0$ si ha $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
   (Teorema di Pitagora)

4. Mostrare che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}$.
   (Regola del parallelogramma)

5. (a) Mostrare che $\forall x, y > 0$ e $p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ si ha $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
   (Disuguaglianza di Young)

   (b) Mostrare che $\forall p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $\{a_n\} \in \ell_p$ e $\{b_n\} \in \ell_q$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
   (Disuguaglianza di Holder)

   (c) Mostrare che $\forall p \geq 1$ e $\{a_n\}, \{b_n\} \in \ell_p$ si ha $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
   (Disuguaglianza di Minkowski)

*(Suggerimenti: per la (a) trovare il massimo della funzione* $f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$, *per la (b) applicare la (a) con* $x = \frac{|a_n|}{(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}}$ *e* $y = \frac{|b_n|}{(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}}$ *e sommare, per la (c), nel caso* $p > 1$ *scrivere* $|a_n + b_n|^p = |a_n + b_n||a_n + b_n|^{p-1}$ *e applicare prima la disuguaglianza triangolare e poi la (b).)*

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 2 (29 Settembre 2010)
Limiti e continuità in più variabili

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\sin\left(y^3\right)}{x^4+y^2}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(y^3\right)}{x^4+y^2}$.

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$.

2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^3}{x^8+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\tan(xyz)}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{-t^2}\,dt}{y-x} & \text{se } x \neq y \\ e^{-xy} & \text{se } x = y \end{cases}$

3. Discutere, al variare dei parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta > 0$, la continuità della funzione $f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{|x_1|^{\alpha_1}\ldots|x_n|^{\alpha_n}}{\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^\beta} & \text{se } (x_1,\ldots,x_n) \neq (0,\ldots,0) \\ 0 & \text{se } (x_1,\ldots,x_n) = (0,\ldots,0) \end{cases}$.

4. Provare che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ per ogni aperto $A$ di $\mathbb{R}^m$.

5. Sia $f(x,y) = \dfrac{e^{\cos x}}{1+x^2+y^2+\sin^2(xy)}$. Provare che $f$ ha un massimo ma non un minimo e calcolare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\max_{\mathbb{R}^2} f$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 3 (12 Ottobre 2010)
Derivazione in più variabili

1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (c) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^8+y^2}$.

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2+z^6} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

2. Stabilire se le seguenti funzioni possono essere estese a funzioni di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^2}$

3. Sia $X$ lo spazio delle successioni reali. Provare che $\forall x \in X, 1 \leq p \leq q \leq \infty$ si ha $\|x\|_q \leq \|x\|_p$; dedurne che $\ell^p \subset \ell^q \ \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty$.
(*Suggerimento: considerare prima il caso* $q = \infty$, *poi per* $q < +\infty$ *mostrare che* $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q$)

4. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni definita come $x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$.

   (a) Provare che $x_n \in \ell^p \ \forall 1 \leq p \leq \infty$.

   (b) Provare che $x_n$ è una successione limitata in $\ell^p \ \forall 1 \leq p \leq \infty$, cioè $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty \ \forall 1 \leq p \leq \infty$.

   (c) Provare che $x_n$ non ha sottosuccessioni convergenti in $\ell^p$ per alcun $1 \leq p \leq \infty$.

   (*Suggerimento: per l'ultimo punto, mostrare che* $x_n$ *non ha sottosuccessioni di Cauchy.*)

5. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che $f(x) \overset{\|x\|\to\infty}{\to} 0$. Provare che $f$ ha un massimo oppure un minimo.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 4 (19 Ottobre 2010)
Derivazione in più variabili

1. Discutere la continuità, l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^4\right)^\alpha \left(1-e^{-xy}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Usando il lemma di Schwartz, provare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   è di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $C^2$.

3. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che $f(x) \overset{\|x\|\to\infty}{\to} 0$. Provare che $f$ è uniformemente continua.

4. Sia $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ e $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $\begin{cases} g(0) = 0 \\ f(t, g(t)) \equiv 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0 \end{cases}$.

   Usando la regola di derivazione per funzioni composte, mostrare che $g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$.

5. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

   (a) Continua ma senza derivate parziali.

   (b) Parzialmente derivabile ma discontinua.

   (c) Continua e dotata di derivate parziali ma non differenziabile.

   (d) Differenziabile ma non di classe $C^1$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 5 (29 Ottobre 2010)
Massimi e minimi in più variabili

1. Trovare i punti stazionari delle seguenti funzioni e stabilire se si tratta di massimi o di minimi locali:

   (a) $f(x,y) = \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$ (d) $f(x,y) = x(x-y)^4$

   (b) $f(x,y) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + y^4 - 2y^2$

   (c) $f(x,y) = y^4 - y^3 \cos x$ (e) $f(x,y,z) = \sin^2(xyz)$

2. Determinare l'estremo superiore e inferiore delle seguenti funzioni, specificando se si tratta di massimo o di minimo locale:

   (a) $f(x,y) = x^6 - 3x^2 + y^2$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$

3. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = xy\left(1-x^2-y^2\right)$ sull'insieme $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\right\}$

4. Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nell'origine delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = e^{\sin(x)\cos(y)}$ (b) $f(x,y) = \tan(x+y)$

5. Sia $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$:

   (a) Provare che $x_0$ è un punto critico per $f^2 \iff f(x_0) = 0$ oppure $\nabla f(x_0) = 0$.

   (b) Provare che se $f(x_0) = 0$ allora $x_0$ è di minimo locale per $f^2$.

   (c) Provare che se $x_0$ è di massimo locale per $f$ e $f(x_0) > 0$ allora $x_0$ è di massimo locale per $f^2$.

   (d) Provare che se $x_0$ è di massimo locale per $f$ e $f(x_0) < 0$ allora $x_0$ è di minimo locale per $f^2$.

   (e) Provare che se $x_0$ è di minimo locale per $f$ e $f(x_0) > 0$ allora $x_0$ è di minimo locale per $f^2$.

   (f) Provare che se $x_0$ è di minimo locale per $f$ e $f(x_0) < 0$ allora $x_0$ è di massimo locale per $f^2$.

   (g) Provare che se $x_0$ non è di massimo né di minimo locale per $f$ e $f(x_0) \neq 0$ allora $x_0$ non è di massimo né di minimo locale per $f^2$

6. Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita come $g(x) = \dfrac{x}{\left(\|x\|^2+1\right)^2}$. Trovare $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ tale che $\nabla f = g$ e provare che $f$ è lipschitziana.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 6 (10 Novembre 2010)
Integrali dipendenti da parametro

1. Sia $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2x}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{x}} \sin\left(x^2t^2\right) dt$.
   Mostrare che $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e calcolare $f'(x)$.

2. Sia $f(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \log\left(1 + e^{xt}\right) dt$.
   Mostrare che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e calcolare esplicitamente $f'(0)$.

3. Sia $f(x, y) = \displaystyle\int_0^1 e^{\left(x^3-3x+y^2\right)t^2} dt$.
   Determinare i suoi punti critici e stabilire se si tratta di massimi o di minimi locali.

4. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(xt)dt$ per $x \in (-2, 2)$:
   (a) Trovare un'espressione esplicita per $f$.
   (b) Calcolare $f'(x)$.
   (c) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(xt)}dt$.

5. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-xt^2}}{t}dt$:
   (a) Trovare il dominio di $f$.
   (b) Mostrare che $f$ è di classe $C^1$ e calcolare esplicitamente $f'(x)$.
   (c) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
   (d) Posta $g(x, y) := f(xy)$, stabilire se $g$ è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

6. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t^3 + t}dt$:
   (a) Provare che $f \in C^1(\mathbb{R})$.
   (b) Calcolare esplicitamente $f'(x)$.
   (c) Trovare un'espressione esplicita per $f$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 7 (17 Novembre 2010)
Integrali dipendenti da parametro, successioni di funzioni

1. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log\left(x^2t^2+1\right)}{t^2+1}dt$:
   (a) Provare che $f$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ $f$ è continua.
   (c) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ $f$ è derivabile e per questi valori di $x$ calcolarne esplicitamente la derivata.
   (d) Trovare un'espressione esplicita per $f$.
2. Sia $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}dt$:
   (a) Provare che $f \in C^1((0,+\infty)\times(0,+\infty))$.
   (b) Calcolare esplicitamente $\nabla f(x,y)$.
   (c) Trovare un'espressione esplicita per $f$.
3. Discutere la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:
   (a) $f_n(x) = n^x$.
   (b) $f_n(x) = \dfrac{\chi_{[n,n+1]}}{n}$.
   (c) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2x^2+1}$.
   (d) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$.
4. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}$.
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(5x)^n}$.
   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-n\left|x^2-1\right|}}{n\log^2 n}$.
   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}$.
5. Sia $f_n(x) = \arctan(nx)$:
   (a) Provare che $f_n$ converge puntualmente su $[0,1]$ ma non uniformemente.
   (b) Provare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Dedurne che la convergenza uniforme è una condizione sufficiente ma non necessaria per il passaggio al limite sotto integrale.

6. Trovare due successioni di funzioni $f_n$ e $g_n$ a valori in $[0,1]$ tali che:

   (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = \lim_{n\to\infty} g_n(x)\ \forall x \in [0,1]$

   (b) $\int_0^1 f_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} 1.$

   (c) $\int_0^1 g_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} +\infty.$

7. Sia $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{2}{\pi\left(x^2+1\right)^2}$ e $g_n(x) = ng(nx)$.
   Calcolare esplicitamente $(f * g_n)(x)$ e provare che $f * g_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente su $\mathbb{R}$.
   (*Suggerimento: per mostrare la convergenza uniforme, potrebbe essere utile ricordare che*
   $|\arctan t| = \dfrac{\pi}{2} - \left|\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)\right|\ \forall t \neq 0$)

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 8 (24 Novembre 2010)

Successioni di funzioni, spazi metrici, contrazioni

1. Calcolare:

   (a) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{(1-x)^2}dx.$

   (b) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nxe^{-nx}}{1+nx}dx.$

   (c) $\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}\cos^2(n\pi x)dx.$

   (d) $\int_1^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{(n+1)n^x}dx.$

2. Sia $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$.

   (a) Calcolare $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$.

   (b) Stabilire $f_n$ e/o $f_n'$ convergono uniformemente.

   (c) Dire per quali $x\in\mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'$.

3. Sia $X=(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$.
   Provare che $\Phi:X\to X$ definita come $(Tf)(x)=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\int_0^1\arctan(xyf(y))dy$ è una contrazione.

4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

   (a) Provare che $|f(x)-f(y)|<|x-y|$.

   (b) Provare che $f$ non ha punti fissi; dedurne che l'ipotesi $k<1$ è essenziale per la validità del teorema delle contrazioni.

5. Siano $1\le p<q\le\infty$ e $x_n$ una successione di successioni definita come
   $x_n(k)=\begin{cases}\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} & \text{se } k\le n\\ 0 & \text{se } k>n\end{cases}$

   (a) Mostrare che $x_n\in\ell_p$.

   (b) Mostrare che $x_n$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_q$.

   (c) Mostrare che $x_n$ non converge ad alcun elemento di $\ell_p$ rispetto a $\|\cdot\|_q$; dedurne che $(\ell_p,\|\cdot\|_q)$ non è completo $\forall 1\le p<q\le\infty$.

6. Siano $p,q>1$ tali che $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ e $f,g\in C([a,b])$. Mostrare che:

   (a) $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$
   (Disuguaglianza di Hölder)

(b) $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
(Disuguaglianza di Minkowski)

*(Suggerimento: procedere come nelle disuguaglianze di Hölder e Minkowski in $\ell_p$)*

7. Siano $f, g \in C(\mathbb{R})$ tali che $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists h_n \in C(\mathbb{R})$ integrabile tale che $|f(x-y)||g(y)| \leq h_n(y)\ \forall x \in [-n, n]$. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder e il teorema di Fubini, provare che
$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx\right)$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Tutorato numero 9 (1 Dicembre 2010)
Contrazioni, equazioni differenziali

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. (d) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t+1} + t^2 + t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \dot{x} = xe^{x+t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. (e) $\begin{cases} \dot{x} = tx + t^3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$. (h) $\begin{cases} \dot{x} = \sin x \cos x \sin t \cos t \\ x(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -x + t \\ x(0) = 0 \end{cases}$. (f) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$. (i) $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + \sin t \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 3 \end{cases}$.

2. Sviluppare le seguenti funzioni in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$:

(a) $f(x) = |x|$. (b) $f(x) = (\pi - |x|)^2$.

Utilizzando i risultati ottenuti, mostrare che:
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3. Sia $X = \{f \in C([0,1]) : 0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x\}$ e $\Phi : X \to C([0,1])$ definita come $\Phi(f)(x) = \int_0^x e^{-\frac{f(t)}{2}} dt$.

(a) Mostrare che $X$ è un sottoinsieme chiuso di $(C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$.

(b) Mostrare che $\Phi(X) \subset X$ e che $\Phi$ è una contrazione.

(c) Determinare tutti i punti fissi di $\Phi$.

4. Mostrare che l'equazione $\sin\left(\sqrt{x+1}\right) = x$ ha un'unica soluzione in $[0,1]$.

5. Mostrare che la successione definita da $\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = \frac{1}{x_{n-1}+2} \end{cases}$ converge a $\sqrt{2} - 1$ per qualsiasi scelta di $a \geq 0$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

TUTORATO NUMERO 10 (9 DICEMBRE 2010)
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy al variare del dato iniziale, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = e^x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} \dot{x} = x - \cos t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} \dot{x} = \cos^2 x \sin^2 t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(e) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2+1}{t^2+1} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(f) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x \log^2 |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari:

(a) $\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} \dddot{x} + 8x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} \ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 1 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 9t \\ \dot{x}(0) = -3 \\ x(0) = 5 \end{cases}$.

(e) $\begin{cases} \dddot{x} + \ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = te^t \\ \ddot{x}(0) = 4 \\ \dot{x}(0) = \frac{1}{2} \\ x(0) = 5 \end{cases}$.

(f) $\begin{cases} \dddot{x} + \dot{x} = \sin t \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$.

3. Determinare i punti di equilibrio dei seguenti problemi di Cauchy e trovare, al variare del dato iniziale, l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} \dot{x} = (|x| - 1)\cos x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = \left(x^3 - x\right) \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} \left(x^4 - 4x^2\right) \log |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

TUTORATO NUMERO 11 (15 DICEMBRE 2010)
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 9x = \cos t$.

2. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\dddot{x} + x = te^{-t}$.

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddddot{x} + 13\ddot{x} + 36x = \sin t$ tali che $x(0) = 0$.

4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = e^t$ tali che $x(0) = 0 = \dot{x}(0)$.

5. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\dddot{x} + \ddot{x} - 2x = e^{-t} \sin t$ tali che $x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} 0$.

6. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ al variare del dato iniziale, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza.

7. Determinare i punti di equilibrio del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x^5 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ e trovare, al variare del dato iniziale, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

8. Discutere l'unicità della soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} \left(x^4 - x^2\right) \log|\log|x|| & \text{se } x \neq 0, \pm 1 \\ 0 & \text{se } x = 0, \pm 1 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ determinarne i punti di equilibrio e, in caso di unicità, trovare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

9. Dire per quali valori del parametro reale positivo $\alpha$ il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione e mostrare che in tutti gli altri casi le soluzioni sono infinite.

10. Sia $F \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ inferiormente limitata e $(x(t), y(t))$ la soluzione del sistema gradiente $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{cases}$ :

    (a) Provare che $\|\nabla F(x(t), y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0$.

    (b) Trovare $F$ tale che il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y \\ \dot{y} = -2x - 2y - 4y^3 \end{cases}$ può essere scritto in questa forma.

    (c) Provare che in questo caso si ha $(x(t), y(t)) \overset{t\to\infty}{\to} (0, 0)$ per qualsiasi scelta dei dati iniziali $(x(0), y(0))$.