

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Tutorato 5

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti di funzioni reali.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{2x+4} - 1}{x + 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\sin(3x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - 4x)}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\log\left((\alpha + x)^2\right) - \log(\alpha^2)\right)}{x}, \quad \forall \alpha \in (0, +\infty)$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\log(3 + 3x) - \log(3)}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + e^{\frac{1}{x^3}})^{\sin x}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(e^{-\frac{1}{x}} - x \ln x)}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}} - 1}$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\left(\frac{x^2 + \ln|x|}{x^2} \right)^{\frac{1}{\ln|x|}} - 1 \right]$
13. $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{\sin(\sinh(\frac{1}{x+\pi}))}{(x+\pi)^{-\frac{1}{x+\pi}}}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 \cos x - x}{2 \tan(\frac{1}{x}) + 2x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log(e+x))^{\frac{1}{x}}$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log \log x)^{\log x} - x(\log x)^{\log \log x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\cos(x-\frac{\pi}{2})}}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\log(1 + \sin^4 x)}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctan(x) + (1 - \cos 2x) \sin^{21} x}{27x^{45} + 5 \sin x}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5x) \tan 3x}{(\sin x - x^3)^3}$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^x \sin\left(e^{-x} \sin \frac{2}{x}\right)$
23. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x (e^{\cos x} - 1)$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{\log_{13}(x^2)}}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\log(x) \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\log(x)} \right) \right) + 1 \right)^{\frac{\log(x^4) \left(\sqrt[5]{x^6 + x^5} - \sin \left(420x^5 - \frac{\pi^3}{7} x \right) \right)}{\log_{23}(175)x^2 + x}}$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti di successioni.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + 1) - 2 \log n}{\log(n^5 + 3) - 5 \log n}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-5n}}{\log(1 + \sqrt{3}e^{-5n})}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{7}{5} \right)^n (\sqrt[n]{7^n + 5^n} - 7)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n \arctan(3e^n)) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\arctan(n) - \frac{\pi}{2} \right)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\sqrt{n}} - 2^n$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (2e^{\frac{\ln n}{n}} - 2)$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_{1+\frac{1}{n}}(5) - \log_{1-\frac{1}{n}}(5)}{n}$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\frac{1}{n^5})}{2 \log(n^6 + n^2)}$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) - \log(1 - \sin(\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}(1 + n \sin(\frac{1}{n}))}$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n \frac{\tanh(\frac{1}{n^n})}{n \log(\sqrt{n^2 + 1} - n + 1)}$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(ne^{-2n}) + n\sqrt{10 - 10 \cos(e^{-2n})}}{\sin((2n + 1)e^{-2n})}$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 (\log(\sqrt[n]{n+1}) - \log(\sqrt[n]{n-1}))}{n \sin(e^{\frac{1}{4n}} - 1)}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \log \left(\frac{n! + 1}{n!} \right) \right)^{\frac{\sqrt{n!+1}}{\sqrt{(n!)^3 + 3n! + 4} - \sqrt{(n!)^3 + 2n! + 2}}}$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{\pi n^3 + n}{n^2 + 2n^3} \right) (2n + 1)}{\log^n \left(e + \frac{1}{n} \right)}$

Esercizio 3. Calcolare al variare del parametro α il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}}$$

Esercizio 4. Dimostrare che le seguenti equazioni ammettono una soluzione nell'intervallo di riferimento.

1. $x^2 - x = \frac{1}{x}$ per $x \in (1, 5)$
2. $\log(x) = -x^3$ per $x \in (0, +\infty)$
3. $e^x = x^2 - 1$ per $x \in \mathbb{R}$
4. $(\tan(x))^2 + \arctan(x^2) = 5x$ per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
5. $x^2 + 10 \sin(x) = 1000$ per $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 5. Un monaco tibetano parte alle 7 del mattino dal suo monastero e raggiunge la cima della montagna alle 7 di sera: si accampa e trascorre la notte a meditare. Il giorno dopo riparte alle 7 del mattino e torna al monastero alle 7 di sera, percorrendo lo stesso cammino dell'andata. Dimostrare che esiste un punto lungo il cammino che il monaco attraversa esattamente alla stessa ora nei due giorni.