

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2025/2026
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Luca Battaglia
Esercitatrice: Michela Procesi
Tutori: Francesco Caristo, Leonardo Loepp

Soluzioni Tutorato 3

Esercizio 1.

1.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
2.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 - n+1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{\infty} = 0$$
3.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{67n^3 + 3n^2 - 9n + 31}{\sqrt{9n^6 + 4n^4 - 7n^2} + 8n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(67 + \frac{3}{n} - \frac{9}{n^2} + \frac{31}{n^3} \right)}{\sqrt{n^6 \left(9 + \frac{4}{n^2} - \frac{7}{n^4} \right)} + 8n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(67 + \frac{3}{n} - \frac{9}{n^2} + \frac{31}{n^3} \right)}{n^3 \left(\sqrt{9 + \frac{4}{n^2} - \frac{7}{n^4}} + \frac{8}{n^2} \right)} =$$
$$\frac{67 + 0 + 0 + 0}{\sqrt{9 + 0 + 0 + 0}} = \frac{67}{3}$$
4.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^6 - (n-1)^6}{(n+1)^5 + (n-1)^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^3 - (n-1)^3)((n+1)^3 + (n-1)^3)}{(n+1)^5 + (n-1)^5} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n^2 + 2)((n+1)^3 + (n-1)^3)}{(n+1)^5 + (n-1)^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(6 + \frac{2}{n^2} \right) \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)^3 \right)}{n^5 \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^5 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)^5 \right)} =$$

$$= \frac{12}{2} = 6$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 + 10n^3 - 2n + 1}{12n^4 - 8n^5 - 2n^2 + n - 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5}{-8n^5} = -\frac{7}{8}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + n^{\frac{2}{3}} + 7n^{\frac{5}{4}} - 3\sqrt{n} + 9n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{8}{7}} + 2n^{\frac{3}{2}} - 3n^{\frac{1}{5}} + 5n^{\frac{9}{8}} - 100n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^{\frac{3}{2}}}{2n^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + 1}}{1 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + 1}}{1 - n} \cdot \frac{\sqrt{4n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{4n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2 - n^2 - 1}{(1 - n)(\sqrt{4n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + 1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 3}{(1 - n)(\sqrt{4n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + 1})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n - 1)(n + 1)}{(1 - n)(\sqrt{4n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + 1})} = -3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{4n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= -3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n(\sqrt{4 - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})} = -3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \\ &= -3 \cdot \frac{1 + 0}{\sqrt{4 - 0} + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{3}{3} = -1 \end{aligned}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi(2n + 1))}{n^2 + 3n} n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2\pi n + \pi)}{n^2(1 + \frac{3}{n})} n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi)}{1 + \frac{3}{n}} n = -\infty$$

$$\begin{aligned} 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{\sqrt{5n^3 + 36n^2} - \sqrt{10n^3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{\sqrt{5n^3 + 36n^2} - \sqrt{10n^3}} \cdot \frac{\sqrt{5n^3 + 36n^2} + \sqrt{10n^3}}{\sqrt{5n^3 + 36n^2} + \sqrt{10n^3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}(\sqrt{5n^3 + 36n^2} + \sqrt{10n^3})}{5n^3 + 36n^2 - 10n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}(\sqrt{5n^3 + 36n^2} + \sqrt{10n^3})}{n^3(-5 + \frac{36}{n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{97}(\sqrt{5n^3 + 36n^2} + \sqrt{10n^3})}{-5 + \frac{36}{n}} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n + 1})(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n + 1}} = \frac{-1}{+\infty + \infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt[3]{n^2-1} - \sqrt[3]{n^2+2n+2}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt[3]{n^2-1} - \sqrt[3]{n^2+2n+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{n^2-1} \cdot \sqrt[3]{n^2+2n+2} + \sqrt[3]{n^2+2n+2}}{\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{n^2-1} \cdot \sqrt[3]{n^2+2n+2} + \sqrt[3]{n^2+2n+2}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \left(\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{n^2-1} \cdot \sqrt[3]{n^2+2n+2} + \sqrt[3]{n^2+2n+2} \right)}{n^2-1 - n^2-2n-2} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^4}} \right)}{n \left(-2 - \frac{3}{n} \right)} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{5}{2} \sqrt[3]{n} = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+3n^5-4n^3+7n^2-3} - n^3 - 9n^2}{n^2+e} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+3n^5-4n^3+7n^2-3} - n^3 - 9n^2}{n^2+e} \cdot \frac{\sqrt{n^6+3n^5-4n^3+7n^2-3} + n^3 + 9n^2}{\sqrt{n^6+3n^5-4n^3+7n^2-3} + n^3 + 9n^2} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6+3n^5-4n^3+7n^2-3 - (n^3+9n^2)^2}{(n^2+e) \left(\sqrt{n^6+3n^5-4n^3+7n^2-3} + n^3 + 9n^2 \right)} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(-15 - \frac{81}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3} - \frac{3}{n^5} \right)}{(n^2+e) \left(n^3 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^3} + \frac{7}{n^4} - \frac{3}{n^6}} + 1 + \frac{9}{n} \right) \right)} = -\frac{15}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\sqrt{4n^4+n^3}-\sqrt{4n^4-2n^3}}}{2n+\sqrt{n}+3} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{4n^4+n^3}-\sqrt{4n^4-2n^3})(\sqrt{4n^4+n^3}+\sqrt{4n^4-2n^3})}{\sqrt{4n^4+n^3}+\sqrt{4n^4-2n^3}}}}{n \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4n^4+n^3-4n^4+2n^3}{\sqrt{4n^4+n^3}+\sqrt{4n^4-2n^3}}}}{n \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n} \right)} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{3n^3}{n^2 \left(\sqrt{4+\frac{1}{n}} + \sqrt{4-\frac{2}{n}} \right)}}}{n \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^{\frac{1}{2}}}}{n \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n} \right) \sqrt{\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}} + \sqrt{4-\frac{2}{n}} \right)}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{1}{2}} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n}\right) \sqrt{\left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + \sqrt{4 - \frac{2}{n}}\right)}} = 0 \\
14. \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi \sqrt[3]{\sqrt{3n^{12} + n^3} - \sqrt{3n^6 + 9}}}{2\sqrt[3]{9}n + 69\sqrt[5]{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3n^{12} + n^3} - \sqrt{3n^6 + 9})(\sqrt{3n^{12} + n^3} + \sqrt{3n^6 - 9})}{(\sqrt{3n^{12} + n^3} + \sqrt{3n^6 - 9})}}}{n \left(2\sqrt[3]{9} + \frac{69}{n^{\frac{4}{5}}}\right)} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi \sqrt[3]{\frac{3n^{12} + n^3 - 3n^{12} + 18\sqrt{3}n^6 - 81}{n^6 \left(\sqrt{3 + \frac{1}{n^9}} + \sqrt{3 - \frac{9}{n^6}}\right)}}}{n \left(2\sqrt[3]{9} + \frac{69}{n^{\frac{4}{5}}}\right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi \sqrt[3]{\frac{n^6 \left(18\sqrt{3} + \frac{1}{n^3} - \frac{81}{n^6}\right)}{n^6 \left(\sqrt{3 + \frac{1}{n^9}} + \sqrt{3 - \frac{9}{n^6}}\right)}}}{n \left(2\sqrt[3]{9} + \frac{69}{n^{\frac{4}{5}}}\right)} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi \sqrt[3]{\frac{(18\sqrt{3} + \frac{1}{n^3} - \frac{81}{n^6})}{\left(\sqrt{3 + \frac{1}{n^9}} + \sqrt{3 - \frac{9}{n^6}}\right)}}}{n \left(2\sqrt[3]{9} + \frac{69}{n^{\frac{4}{5}}}\right)} \right) = \sin(0) = 0 \\
15. \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^{\frac{5}{2}} \log^{\frac{1}{4}}(2n) + 12 \log^{\frac{37}{7}}(n^3) + 53n \log^{\frac{33}{14}}(n^n)}{75n^{\frac{3}{5}} \log(104n) + 61n^{\frac{20}{9}} - 22n^{\frac{\pi}{3}} \log^{\frac{5}{3}}(n^{2n}) - 9n^{\frac{6}{7}} \log^{\frac{5}{2}}(n^n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^{\frac{5}{2}} \log^{\frac{1}{4}}(2n) + 12 \cdot 3^{\frac{37}{7}} \log^{\frac{37}{7}}(n) + 53n \cdot n^{\frac{33}{14}} \log^{\frac{33}{14}}(n)}{75n^{\frac{3}{5}} \log(104n) + 61n^{\frac{20}{9}} - 22n^{\frac{\pi}{3}} \cdot (2n)^{\frac{5}{3}} \log^{\frac{5}{3}}(n) - 9n^{\frac{6}{7}} \cdot n^{\frac{5}{2}} \log^{\frac{5}{2}}(n)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^{\frac{5}{2}} \log^{\frac{1}{4}}(2n) + 12 \cdot 3^{\frac{37}{7}} \log^{\frac{37}{7}}(n) + 53n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{33}{14}}(n)}{75n^{\frac{3}{5}} \log(104n) + 61n^{\frac{20}{9}} - 22 \cdot 2^{\frac{5}{3}} n^{\frac{\pi+5}{3}} \log^{\frac{5}{3}}(n) - 9n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{5}{2}}(n)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{33}{14}}(n) \left(53 - 5 \frac{n^{\frac{5}{2}} \log^{\frac{1}{4}}(2n)}{n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{33}{14}}(n)} + 12 \cdot 3^{\frac{37}{7}} \frac{\log^{\frac{37}{7}}(n)}{n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{33}{14}}(n)}\right)}{n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{5}{2}}(n) \left(-9 + 75 \frac{n^{\frac{3}{5}} \log(104n)}{n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{5}{2}}(n)} + 61 \frac{n^{\frac{20}{9}}}{n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{5}{2}}(n)} - 22 \cdot 2^{\frac{5}{3}} \frac{n^{\frac{\pi+5}{3}} \log^{\frac{5}{3}}(n)}{n^{\frac{47}{14}} \log^{\frac{5}{2}}(n)}\right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{53}{-9 \log^{\frac{1}{7}}(n)} = 0 \\
16. \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{xn+2}{n}\right)^3} - \sqrt{x^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{xn+2}{n}\right)^3} - \sqrt{x^3}\right) \left(\sqrt{\left(\frac{xn+2}{n}\right)^3} + \sqrt{x^3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{xn+2}{n}\right)^3} + \sqrt{x^3}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{\left(x + \frac{2}{n}\right)^3 - x^3}{\sqrt{\left(x + \frac{2}{n}\right)^3} + \sqrt{x^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{x^3 + \frac{6}{n}x^2 + \frac{12}{n^2}x + \frac{8}{n^3} - x^3}{\sqrt{\left(x + \frac{2}{n}\right)^3} + \sqrt{x^3}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + \frac{6}{n}x + \frac{4}{n^2}}{\sqrt{\left(x + \frac{2}{n}\right)^3} + \sqrt{x^3}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Per verificare che una successione a_n tende ad $L \in \mathbb{R}$ usando la definizione dobbiamo far vedere che $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$ si ha che $|a_n - L| < \epsilon$.

1. Sia $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare N per cui $\left|\frac{2n+3}{n} - 2\right| < \epsilon, \forall n > N$.

Andando a risolvere la disequazione otteniamo:

$$\epsilon > \left|\frac{2n+3}{n} - 2\right| = \left|2 + \frac{3}{n} - 2\right| = \left|\frac{3}{n}\right| = \frac{3}{n}$$

cioè $n > \frac{3}{\epsilon}$, prendendo quindi $N > \frac{3}{\epsilon}$ (per esempio $N = \left[\frac{3}{\epsilon}\right] + 1$) si ottiene la tesi.

2. Sia $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare N per cui $\left|\frac{n}{n+5} - 1\right| < \epsilon, \forall n > N$.

Andando a risolvere la disequazione otteniamo:

$$\epsilon > \left|\frac{n}{n+5} - 1\right| = \left|\frac{n-n-5}{n+5}\right| = \left|\frac{-5}{n+5}\right| = \frac{5}{n+5}$$

$$\frac{5}{n+5} < \epsilon \iff \frac{n+5}{5} > \frac{1}{\epsilon} \iff n+5 > \frac{5}{\epsilon} \iff n > \frac{5}{\epsilon} - 5,$$

prendendo quindi $N > \frac{5}{\epsilon} - 5$ (per esempio $N = 0$ se $\epsilon \geq 1$ e $N = \left[\frac{5}{\epsilon} - 5\right] + 1$ se $1 > \epsilon > 0$) si ha la tesi.

3. Sia $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare N per cui $\left|\frac{3n^2+2}{5n^2-7} - \frac{3}{5}\right| < \epsilon, \forall n > N$.

Andando a risolvere la disequazione otteniamo:

$$\epsilon > \left|\frac{3n^2+2}{5n^2-7} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{15n^2+10-15n^2+21}{5(5n^2-7)}\right| = \left|\frac{31}{5(5n^2-7)}\right|,$$

se $n \geq 2$ allora $5n^2 - 7 > 0$ e quindi posso levare il modulo:

$$\frac{31}{5(5n^2-7)} < \epsilon \iff 5n^2-7 > \frac{31}{5}\epsilon \iff n^2 > \frac{31}{25}\epsilon + \frac{7}{5} \iff$$

$$\iff n > \sqrt{\frac{31}{25}\epsilon + \frac{7}{5}},$$

che esiste dato che $\frac{31}{25}\epsilon + \frac{7}{5} > 0, \forall \epsilon > 0$. Prendendo $N > \sqrt{\frac{31}{25}\epsilon + \frac{7}{5}}$ si ha la tesi.

4. Per verificare che una successione a_n tende ad $+\infty$ usando la definizione dobbiamo far vedere che $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$ si ha che $a_n > M$.

Nel nostro caso preso $M > 0$ dobbiamo trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n^2 - 8n + 4}{n - 4} > M, \forall n > N$.

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - 8n + 4}{n - 4} > M &\iff n^2 - 8n + 4 > M(n - 4) \iff n^2 - (8 + M)n + 4(1 + M) > 0 \\ &\iff n > \frac{8 + M + \sqrt{48 + M^2}}{2} \vee n < \frac{8 + M - \sqrt{48 + M^2}}{2} \end{aligned}$$

che esistono dato che $48 + M^2 > 0$, quindi preso $N > \frac{8 + M + \sqrt{48 + M^2}}{2}$ si ha la tesi.

5. Sia $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare $N \in \mathbb{N}$ per cui $|\log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right)| < \epsilon$, dato che $\log_2(x) > 0, \forall x > 1$ allora $\log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ quindi posso levare il modulo.

$$\begin{aligned} \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \epsilon &\iff 2^{\log_2(1 + \frac{1}{n})} < 2^\epsilon \iff 1 + \frac{1}{n} < 2^\epsilon \iff \frac{1}{n} < 2^\epsilon - 1 \iff \\ &\iff n > \frac{1}{2^\epsilon - 1}, \end{aligned}$$

posso passare all'ultima disuguaglianza dato che $\epsilon > 0$ e $2^x > 1$ per ogni $x > 0$, quindi il denominatore è diverso da 0. Prendendo $N > \frac{1}{2^\epsilon - 1}$ si ha la tesi.

6. Sia $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare $N \in \mathbb{N}$ per cui $|2^{1 + \frac{1}{n}} - 2| < \epsilon$. Dato che $1 + \frac{1}{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ allora $2^{1 + \frac{1}{n}} > 2, \forall n \in \mathbb{N}$, quindi posso levare il modulo:

$$\begin{aligned} 2^{1 + \frac{1}{n}} - 2 < \epsilon &\iff 2 \cdot 2^{\frac{1}{n}} < \epsilon + 2 \iff 2^{\frac{1}{n}} < \frac{\epsilon + 2}{2} \iff \\ &\iff \log_2\left(2^{\frac{1}{n}}\right) < \log_2\left(\frac{\epsilon + 2}{2}\right) \iff \frac{1}{n} < \log_2\left(\frac{\epsilon + 2}{2}\right) \iff n > \frac{1}{\log_2\left(\frac{\epsilon + 2}{2}\right)}, \end{aligned}$$

posso passare all'ultima disuguaglianza dato che $\log_2(x) > 0, \forall x > 1$ e $\frac{\epsilon + 2}{2} > 1$, quindi il denominatore è diverso da 0. Preso $N > \frac{1}{\log_2\left(\frac{\epsilon + 2}{2}\right)}$ si ha la tesi.

Esercizio 3.

Soluzione 1: Da uno degli esercizi del tutorato 1 sappiamo che $f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$

per ogni $n \geq 0$. Calcoliamo quindi il limite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}}}{\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt{5}}{2^{n+1} \sqrt{5}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt{5}}{2^{n+1} \sqrt{5}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1}}{(1 + \sqrt{5})^n} \cdot \frac{1 - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n+1}}{(1 + \sqrt{5})^{n+1}}}{1 - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{(1 + \sqrt{5})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{1} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Soluzione 2: Supponiamo dapprima che tale limite esista per derivare euristicamente tale valore, chiamiamo $r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, abbiamo che:

$$r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$$

Se denotiamo con $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, esso deve quindi soddisfare

$$r = 1 + \frac{1}{r} \implies r^2 - r - 1 = 0 \implies r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

dove abbiamo scartato la soluzione negativa dell'equazione di secondo grado perché r è il limite di una successione positiva; tale valore è ben noto come sezione aurea. Per mostrare rigorosamente che tale valore è effettivamente il limite (dal momento che per derivarlo abbiamo supposto che esso esista) stimiamo $|r_{n+1} - r|$:

$$|r_{n+1} - r| = \left| 1 + \frac{1}{r_n} - \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right| = \frac{1}{r} \left| \frac{r_n - r}{r_n} \right| < \frac{1}{r} |r_n - r| < \frac{1}{r^n} |r_1 - r| \longrightarrow 0$$

Dove abbiamo reiterato la stima su $|r_n - r|$ e abbiamo usato che $r > 1$ nel passaggio a limite.