AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 6 di Mercoledì 25 ottobre 2023

Argomenti: limiti di funzioni

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-(\cos x)^\pi}{x^2}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-(\cos x)^\pi}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^\pi}{x^2}\\
&= -1+\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^\pi}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}\\
&= -1+\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x-1)^\pi-1}{\cos x-1}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\\
&= -1+\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^\pi-1}{y}\\
&= \frac{\pi}{2}-1.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-2\arctan x}{\tan\left(x+x^2\right)+\arctan\left(x+x^3\right)}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-2\arctan x}{\tan\left(x+x^2\right)+\arctan\left(x+x^3\right)} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x\frac{\sin(3x)}{3x}-2x\frac{\arctan x}{x}}{\left(x+x^2\right)\frac{\tan(x+x^2)}{x+x^2}+\left(x+x^3\right)\frac{\arctan(x+x^3)}{x+x^3}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin(3x)}{3x}-2\frac{\arctan x}{x}}{(1+x)\frac{\tan(x+x^2)}{x+x^2}+\left(1+x^2\right)\frac{\arctan(x+x^3)}{x+x^3}}\\
&= \frac{3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}-2\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}}{\lim_{x\to 0}(1+x)\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x+x^2)}{x+x^2}+\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x+x^3)}{x+x^3}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^x-1}{(2x)^{2x}-1}.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^x-1}{(2x)^{2x}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log x}-1}{e^{2x\log(2x)}-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x\log x}-1}{x\log x}}{\frac{e^{2x\log(2x)}-1}{2x\log(2x)}}\frac{x\log x}{(2x)\log(2x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\log x}{(2x)\log(2x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{2(\log 2+\log x)}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{x^4-16\pi^4}.$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{x^4-16\pi^4}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin(x-2\pi)}{(x-2\pi)(x+2\pi)\left(x^2+4\pi^2\right)}=\frac{1}{32\pi^3}\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin(x-2\pi)}{x-2\pi}=\frac{1}{32\pi^3}.$$

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to e}\frac{\log(\log x)}{\log(1+x-e)}.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to e}\frac{\log(\log x)}{\log(1+x-e)} &= \lim_{x\to e}\frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{(x-e)\frac{\log(1+x-e)}{x-e}}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{x-e}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{1}{e}\frac{\log\left(\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)+1\right)}{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}\frac{\log\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}}\\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 6.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt[3]{x}}}{\log x}.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt[3]{x}}}{\log x} &= \lim_{y\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+y}}-e^{\sqrt[3]{1+y}}}{\log(1+y)}\\
&= \frac{1}{e}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)}\frac{e^{\sqrt{1+y}-1}-e^{\sqrt[3]{1+y}-1}}{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e \lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{\sqrt{1+y}-1}-1}{y}-\frac{e^{\sqrt[3]{1+y}-1}-1}{y}\right)\\
&= e \lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{\sqrt{1+y}-1}-1}{\sqrt{1+y}-1}\,\frac{\sqrt{1+y}-1}{y}-\frac{e^{\sqrt[3]{1+y}-1}-1}{\sqrt[3]{1+y}-1}\,\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}\right)\\
&= e\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{e}{6}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(2^{1+x}-3^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(2^{1+x}-3^x\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(2^{1+x}-3^x-1\right)\right)^{\frac{1}{2^{1+x}-3^x-1}}\right)^{\frac{2^{1+x}-3x-1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2^{1+x}-3^x-1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{2\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{x}}\\
&= e^{2\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}}\\
&= e^{2\log 2-\log 3}\\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 8 (Assegnato per casa)**.**
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(1+e^x)}{x+2\sqrt{x+1}-3}.$$

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(1+e^x)}{x+2\sqrt{x+1}-3} &= \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(e^x)+\log(e^{-x}+1)}{x+2\sqrt{x+1}-3}\\
&= \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+2\sqrt{x+1}-3}+\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x+2\sqrt{x+1}-3}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$