AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 1 di mercoledì 4 ottobre 2023

Argomenti: principio di induzione

Esercizio 1.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $n^2 + n$ è pari.

Soluzione: Per $n = 1$ abbiamo $1^2 + 1 = 2$, che è pari. Supponiamo ora che $n^2 + n$ sia pari e dimostriamo che è pari anche $(n+1)^2 + n + 1$:

$$(n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \left(n^2 + n\right) + 2n + 2;$$

è un numero pari perché $n^2 + n$ è pari per ipotesi induttiva e perché anche $2n + 2$ è pari.

Esercizio 2.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $n^3 - n$ è multiplo di 6.

Soluzione: Per $n = 1$ abbiamo $1^3 - 1 = 0$, che è multiplo di 6. Supponiamo ora che $n^3 - n$ sia pari e mostriamo che lo è anche $(n+1)^3 - (n+1)$:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3\left(n^2 + n\right);$$

è un multiplo di 6 perché $n^3 - n$ è un multiplo di 6 per ipotesi induttiva, mentre $3\left(n^2 + n\right)$ è multiplo di 3 perché $n^2 + n$ è pari per l'esercizio precedente.

Esercizio 3.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza $2^{n-1} \leq n!$.

Soluzione: Per $n = 1$ la disuguaglianza è valida perché $2^{1-1} = 1 = 1!$. Supponendo ora che valga $2^{n-1} \leq n!$, dimostriamo che $2^n \leq (n+1)!$:

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq (n+1)n! = (n+1)!.$$

Esercizio 4.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la formula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soluzione: Per $n = 1$ la formula vale perché $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Supponendo ora che la formula valga per n, mostriamo che vale anche per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 5.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 1$, vale la formula $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Soluzione: Per $n=1$ la formula è vera perché $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a = 1 + a\frac{1-a^2}{1-a}$. Supponendo la formula vera per n, per $n+1$ otterremo:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + \frac{a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

Esercizio 6.
Dimostrare che la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a(1) = 1 \\ a(n+1) = \dfrac{a(n)}{2+a(n)} \end{cases}$$

è data da $a(n) = \dfrac{1}{2^n-1}$.

Soluzione: Per $n=1$ abbiamo $a(1) = 1 = \dfrac{1}{2^1-1}$. Supponendo che sia vero per n, per $n+1$ avremo

$$a(n+1) = \frac{a(n)}{2+a(n)} = \frac{\frac{1}{2^n-1}}{2+\frac{1}{2^n-1}} = \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{2^{n+1}-2}{2^n-1}+\frac{1}{2^n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

Esercizio 7 (assegnato per casa)**.**
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la formula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Soluzione: Per $n=1$ la formula vale perché $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}$. Supponendo ora che la formula valga per n, mostriamo che vale anche per $n+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.
\end{aligned}
$$