AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 6 di mercoledì 6 novembre 2024

Argomenti: studio di funzioni

Esercizio 1.
Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - \log(x+1)}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è ben definita quando l'argomento del logaritmo è positivo e il denominatore è diverso da 0, dunque il dominio è

$$(-1, e-1) \cup (e-1, +\infty).$$

Intersezione assi e segno: Poiché il numeratore è sempre positivo, studiando il segno del denominatore otteniamo che

$$f(x) > 0 \iff x \in (e-1, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, e-1);$$

essendo la funzione sempre diversa da 0 ed essendo $f(0) = 1$, otteniamo che

la funzione interseca gli assi nel punto $(0, 1)$.

Asintoti: Poiché $\lim_{x \to -1^-} = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to e-1^{\pm}} = \mp\infty$, deduciamo che gli asintoti di f sono

$x = e - 1$ (verticale), $\quad y = 0$ (orizzontale).

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \frac{1}{(x+1)(1-\log(x+1))^2}$ otteniamo che

$f(x)$ è crescente se $x \in (-1, e-1) \cup (e-1, +\infty)$
$f(x)$ NON ha massimi né minimi.

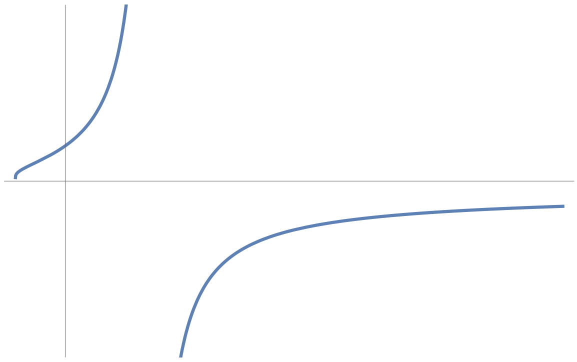
Grafico:

Esercizio 2.
Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è ben definita fintanto che il denominatore è diverso da 0, dunque il dominio è

$$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$



Intersezione assi e segno: Poiché il denominatore è sempre maggiore o uguale di 0, studiando il segno del numeratore otteniamo che

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in (2, +\infty) \\ f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 1 \\ f(x) < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2); \end{aligned}$$

la funzione interseca gli assi nei punto

$$(2, 0), (0, -8).$$

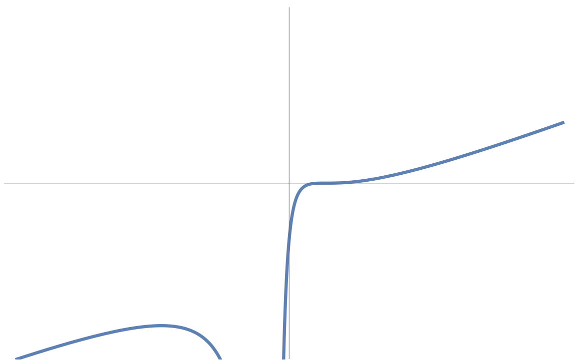
Asintoti: Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -8$ e $\lim_{x \to \pm -1^{\pm}} f(x) = -\infty$, gli asintoti di f sono

$$x = -1 \text{ (verticale)}, \qquad y = x - 8 \text{ (obliquo)}.$$

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \frac{(x-2)^2(x+7)}{(x+1)^3}$ otteniamo che

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \text{è crescente se} & x \in (-\infty, -7) \cup (-1, +\infty) \\ f(x) & \text{è decrescente se} & x \in (-8, -1) \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = -7. \end{array}$$

Grafico:



Esercizio 3 (Assegnato per casa)**.**
Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{3} - 2}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è definita quando gli argomenti delle due radici sono maggiori o uguali a 0, dunque il dominio è

$$[6, +\infty).$$

Intersezione assi e segno: Poiché la funzione è sempre strettamente positiva sul suo insieme di definizione, allora

$$f(x) > 0 \quad \iff \quad x \in [6, +\infty);$$

inoltre, essendo f non definita in 0, avremo che

$$f \text{ NON interseca gli assi.}$$

Asintoti: Poiché $\lim_{x\to 6} f(x) = 3\sqrt{6}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, allora

$$f \text{ NON ha asintoti.}$$

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{6\sqrt{\frac{x}{3} - 1}}$ otteniamo che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente se} & x \in \left(\frac{81}{13}, +\infty\right) \\ f(x) & \text{è decrescente se} & x \in \left[2, \frac{81}{13}\right) \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & x = \frac{81}{13}. \end{array}$$

Grafico: