

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------

Esame di Analisi I - 01/09/2026 *

Esercizio 1 (3 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^4 + ai}{z^4 - a} = i. \quad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione: L'equazione equivale a $z^4 = a(1 - i) = \sqrt{2}ae^{-i\frac{\pi}{4}}$, dunque le soluzioni sono

$$z = \sqrt[8]{2a^2}e^{i(-\frac{\pi}{16} + \frac{k}{2}\pi)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Esercizio 2 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right)^{x-a}. \quad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right)^{x-a} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-a) \ln \cos \frac{1}{\sqrt{x+a}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-a) \left(\cos \frac{1}{\sqrt{x+a}} - 1 + o\left(\cos \frac{1}{\sqrt{x+a}} - 1 \right) \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-a) \left(-\frac{1}{2(x+a)} + o\left(\frac{1}{x+a} \right) \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{(x-a)}{2(x+a)} + o(1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:

Scrivere nome, cognome e numero di matricola.

Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.

Non usare libri, appunti né calcolatrici.

Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+a}+4}{\sqrt{x+a}+2}, \quad (a = 1, 2, 3, 4)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita quando entrambi gli argomenti delle radici sono maggiori o uguali a 0, cioè

$$[-a, +\infty).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Poiché le radici sono sempre maggiori di 0, allora

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x \geq -a,$$

in particolare il grafico della funzione non interseca l'asse orizzontale mentre, essendo $f(0) = \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2}$,
interseca l'asse verticale in $\left(0, \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2}\right)$.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio vale

$$\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = 2\sqrt{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

dunque $y = 1$ è un asintoto orizzontale.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = \frac{1 - 2\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a}(x+a+2)^{\frac{3}{2}}}$, che coincide con quello del numeratore, si deduce che

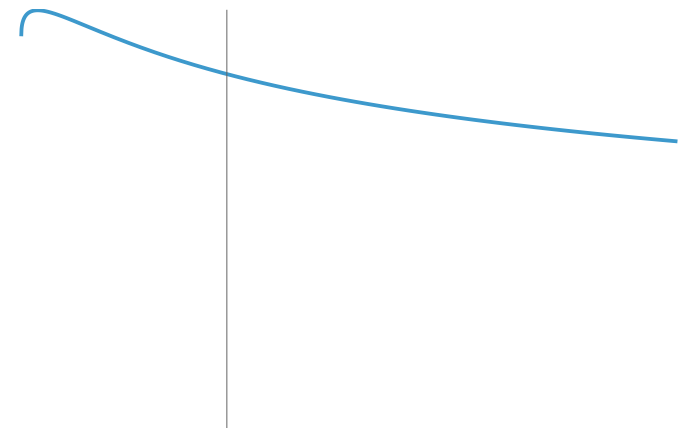
$$\begin{aligned} f(x) & \text{ è crescente per } x < \frac{1}{4} - a \\ f(x) & \text{ è decrescente per } x > \frac{1}{4} - a \\ f(x) & \text{ ha un massimo in } x = \frac{1}{4} - a \end{aligned}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \frac{3(x+a)\sqrt{x+a} - 2x - 2a - 1}{(x+a)^{\frac{3}{2}}(x+a+2)^{\frac{5}{2}}}$, uguale a quello del denominatore, si ottiene
che

$$\begin{aligned} f(x) & \text{ è convessa per } x > 1 - a \\ f(x) & \text{ è concava per } x < 1 - a \\ f(x) & \text{ ha un flesso in } x = 1 - a. \end{aligned}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{a}{2}}^a \frac{1}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx. \quad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{1}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \frac{1}{a^3} \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{1}{\left(1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &\stackrel{\left(y = \frac{x}{a} - 1\right)}{=} \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{(1 - y^2)^{\frac{3}{2}}} dy \\ &\stackrel{\left(z = \arcsin y\right)}{=} \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{1}{\cos^2 z} dz \\ &= \frac{1}{a^2} [\tan z]_{-\frac{\pi}{6}}^0 \\ &= \frac{1}{a^2 \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 (3 punti) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{a \ln(1+x) + \ln(1+ax)}{a \ln(1+x) - \ln(1+ax)} dx. \quad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor del logaritmo otteniamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{a \ln(1+x) + \ln(1+ax)}{a \ln(1+x) - \ln(1+ax)}}{\frac{1}{x}} = \frac{4}{a-1}$, dunque l'integrale ha lo

stesso comportamento di $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$, cioè

NON CONVERGE.

Esercizio 6 (3 punti) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} - a}{\sqrt{k} + a} \arctan \frac{1}{k^{1+(-1)^k}} \quad (a = 1, 2, 3, 4)$$

Soluzione: Poiché considerando i numeri dispari abbiamo $\frac{\sqrt{2n-1} - a}{\sqrt{2n-1} + a} \arctan \frac{1}{(2n-1)^{1+(-1)^{2n-1}}} = \frac{\sqrt{2n-1} - a}{\sqrt{2n-1} + a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$,
la serie non è infinitesima e dunque

NON CONVERGE.

Esercizio 7 (6 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = a \cos(y(x)) x \sin(bx) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (a = \pm 1, b = 2, 3)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{\cos y(x)} &= ax \sin(bx) \\ \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin y(x)}{1 - \sin y(x)} &= \int_0^{y(x)} \frac{1}{\cos y} dy \\ &= \int_0^x \frac{y'(t)}{\cos y(t)} dt \\ &= \int_0^x at \sin(bt) dt \\ &= \left[\frac{a}{b^2} (\sin(bt) - bt \cos(bt)) \right]_0^x \\ &= \frac{a}{b^2} (\sin(bx) - bx \cos(bx)) \\ \Rightarrow \\ y(x) &= \arcsin \frac{e^{\frac{2a}{b^2} (\sin(bx) - bx \cos(bx))} - 1}{e^{\frac{2a}{b^2} (\sin(bx) - bx \cos(bx))} + 1}. \end{aligned}$$