INVERTIBILITÀ A DESTRA / SINISTRA DI MAPPE LINEARI CONTINUE
MAPPE SURIETTIVE / INIETTIVE

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CONTINUITÀ DEGLI INVERSI DESTRI E SINISTRI)

SIANO X, Y SP. DI BANACH E $A \in \mathcal{L}(X,Y)$

1. SE A È SURIETTIVA, HA INVERSO DX CONTINUO $\iff$ $\ker A$ HA UN COMPLEMENTARE IN X

2. SE A È INIETTIVA, HA INVERSO SX CONTINUO $\iff$ $\text{RAN}(A) \lhd Y$ E HA COMPLEMENTARE IN Y

$\boxed{\text{DIM}}$ (1 $\Rightarrow$) SUPPONIAMO $\exists B \in \mathcal{L}(Y,X)$ TALE CHE $A \circ B = \mathbb{I}_Y$.

FACCIAMO VEDERE CHE $\text{RAN}(B)$ È UN COMPLEMENTARE DI $\ker A$

ANZITUTTO, MOSTRO CHE $\text{RAN}(B)$ È CHIUSO:

DATA $\underset{\substack{\parallel \\ By_n}}{x_n} \in \text{ran}\, B$ TALE CHE $x_n \to x$, VOGLIO $x \in \text{ran}\, B$.

$$AB = \mathbb{I} \longrightarrow \begin{array}{c} By_n \to x \\ \parallel \\ BAB y_n \to BAx \end{array} \quad \Rightarrow x = B(Ax) \in \text{ran}\, B$$

MOSTRO CHE $X = \ker A + \text{ran}\, B$:

DATO $x \in X$, VOGLIO SCRIVERLO COME $x = y + z$, $y \in \text{ran}\, B$ $z \in \ker A$

$$x = \underbrace{B(Ax)}_{\in \text{ran}\, B} + \underbrace{x - B(Ax)}_{\in \ker A} \quad \text{PERCHÈ } A(x - BAx) = Ax - \underbrace{ABA}_{AB = \mathbb{I}}x = Ax - Ax = 0$$

MOSTRO CHE $\ker A \cap \text{ran}\, B = \phi$:

SE $x \in \ker A \cap \text{ran}\, B$, ALLORA $Ax = 0$, $x = By = BABy = BAx = B0 = 0$

(1 $\Leftarrow$) SUPPONIAMO $X = \ker A \oplus F$ PER QUALCHE $F \lhd X$. SO CHE $\exists P \in \mathcal{L}(X, F)$ PROIEZIONE

DEFINISCO $By = P(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{NON È UNICO}}}{A^{-1}}\{y\})$ $B : Y \to F$, MA B È BEN DEFINITO PERCHÈ SE

$Ax = Ax' = y$, ALLORA $x - x' \in \ker A \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ Px - Px'}}{P(x - x')} = 0 \Rightarrow$ NON DIPENDE DALLA SCELTA DI x, x'

FACCIO VEDERE CHE $AB = \mathbb{I}_Y$:

FACCIO VEDERE CHE $AB = \mathbb{I}_Y$:

DATO $y \in Y$, AVRÒ $y = Ax$ PER QUALCHE $x \in X$, $x = x_1 + x_2$ $\quad$ $x_1 \in \ker A$, $x_2 \in F$, $x_2 = Px$

$$ABy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DEF. } B}}{=} APx = Ax_2 \underset{\substack{\uparrow \\ x_1 \in \ker A}}{=} Ax = y$$

INFINE, B È CONTINUO: USO IL GRAFICO CHIUSO

PRENDO $y_n \to y \in Y$, $By_n \to x \in F$, VOGLIO DIMOSTRARE $x = By$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ y}}{y_n} = ABy_n \to Ax \implies By = BAx = Px \underset{\substack{\uparrow \\ x \in F}}{=} x. \qquad (x \in F \Leftrightarrow Px = x)$$

2 $\Rightarrow$ SUPPONIAMO $\exists B \in \mathcal{L}(Y, X)$: $BA = \mathbb{I}_X$. ANZITUTTO, $\operatorname{ran}(A) \triangleleft Y$.

PRENDO $Ax_n \to y$, VOGLIO $y = Ax$ PER QUALCHE $x \in X$

$$\underset{BA = \mathbb{I} \to ||}{ABAx_n} \to ABy \implies y = A(By) \in \operatorname{ran} A$$

MOSTRO CHE $Y = \ker B \oplus \operatorname{ran} A$ ($\Rightarrow \ker(B)$ È COMPLEMENTARE DI $\operatorname{ran}(A)$)

VOGLIO $Y = \operatorname{ran} A + \ker B$:

DATO $y \in Y$, $y = \underbrace{A(By)}_{\in \operatorname{ran} A} + \underbrace{y - A(By)}_{\in \ker B}$ PERCHÉ $B(y - ABy) = By - \overset{\mathbb{I}}{\overset{||}{BA}}By = By - By = 0$

$\ker B \cap \operatorname{ran} A = \{0\}$:

SE $y \in \ker B \cap \operatorname{ran} A$, ALLORA $By = 0$, $y = Ax = A\overset{\mathbb{I}}{\overset{||}{BA}}x = ABy = A0 = 0$

2 $\Leftarrow$ SUPPONIAMO $Y = \operatorname{ran} A \oplus F$, PRENDO $P : Y \to \operatorname{ran} A$ PROIEZIONE

DEFINISCO $B = A^{-1}(Py)$.

B È CONTINUA PERCHÉ P È CONTINUA, $A^{-1} : \operatorname{ran} A \to X$ È CONTINUA PERCHÉ L'INVERSA DI $A : X \to \operatorname{ran} A$, INVERTIBILE TRA DUE BANACH ($\operatorname{ran} A \triangleleft Y$)

B È INVERSO SINISTRO DI A:

$$BAx = A^{-1}PAx \underset{\uparrow}{=} A^{-1}Ax = x.$$

$PAx = Ax$ PERCHÉ $Ax \in \operatorname{ran}(A)$

ESEMPIO $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$ $\quad \ell_2 \longrightarrow \ell_2$

$$(x(1), x(2) \dots) \longrightarrow \underline{\left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots\right)}$$

LINEARE, CONTINUO, INIETTIVO, MA $A^{-1} : \operatorname{ran}(A) \to \ell_2$ <u>NON</u> È CONTINUO

$$A^{-1} : (y(1), y(2) \dots) \longrightarrow (y(1), 2y(2), 3y(3), \dots)$$

$$\|A^{-1}(e_n)\| = \|n e_n\| = n \longrightarrow \infty \qquad \|e_n\| = 1 \Rightarrow \text{NON CONTINUA}$$

INFATTI, $\operatorname{ran} A$ NON È CHIUSO, ANZI È DENSO E $\operatorname{ran} A \subsetneq \ell_2$ PERCHÉ

$\underline{y = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)} \in \operatorname{ran} A$: SE $y = Ax$, SAREBBE $x = (1, \dots, 1 \dots) \notin \ell_2$

$\operatorname{ran} A$ È DENSO PERCHÉ CONTIENE c_{00} = "SUCC. DEFINITIVAMENTE NULLE"
$= \operatorname{SPAN}\{e_n\}$

INFATTI, $\underbrace{(y(1), \dots, y(N), 0 \dots)}_{\in c_{00}} = A(y(1), 2y(2), \dots, N y(N))$.

LEMMA SIA $\{x_n\}$ SUCCESSIONE IN ℓ_1 TALE CHE $\sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) y(k) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad (\star)$

$\forall y \in \ell_\infty$. ALLORA $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ IN ℓ_1

(IL VICEVERSA È VERO: $\left|\sum x_n(k) y(k)\right| \leq \|y\|_{\ell_\infty} \|x_n\|_{\ell_1} \longrightarrow 0$)

DIM (IDEA: SE $x_n \geq 0$, $y(k) \equiv 1 \Rightarrow \sum x_n(k) y(k) = \|x_n\|$)

PER ASSURDO SUPPONIAMO $\|x_n\| \geq \delta > 0$.

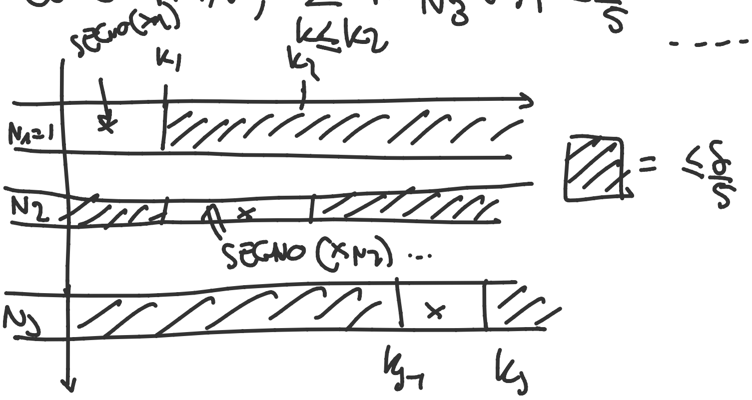
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_1(k)| < +\infty \Rightarrow \exists K_1 \in \mathbb{N} : \sum_{k > K_1} |x_1(k)| \leq \frac{\delta}{5}$$

USANDO $\star$ CON $y = e_k$, OTTENGO $x_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{k \leq K_1} |x_n(k)| \xrightarrow[n]{} 0$ (SOMMA FINITA)

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \sum_{k \leq K_1} |x_{N_2}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$$

POICHÉ $\sum_k |x_{N_2}(k)| < +\infty$, ALLORA $\sum_{k>k_2} |x_{N_2}(k)| \le \frac{\delta}{5}$

COME PRIMA, $\sum_{k\le k_2} |x_{N_3}(k)| \le \frac{\delta}{5}$ .... TROVO $N_1<N_2<\dots$ $k_1<k_2<\dots$ TALI CHE



$$\sum_{k\le k_{j-1}} |x_{N_j}(k)| \le \frac{\delta}{5}, \quad \sum_{k>k_j} |x_{N_j}(k)| \le \frac{\delta}{5}$$

SCELGO $Y\in \ell_\infty$ TALE CHE $Y(k) = \text{SEGNO}\left(x_{N_j}(k)\right)$ SE $k_{j-1}<k\le k_j$

$(Y(k)=\pm 1 \quad \forall k)$

DIS. TRIANGOLARE AL CONTRARIO

$$0 \leftarrow \left|\sum_k x_{N_j}(k)\, Y(k)\right| \ge \left|\sum_{k_{j-1}<k\le k_j} x_{N_j}(k) Y(k)\right| - \left|\sum_{k\le k_{j-1}} x_{N_j}(k) Y(k)\right| - \left|\sum_{k>k_j} x_{N_j}(k) Y(k)\right|$$

DEF. $Y(k) \longrightarrow \|$

$$\ge \sum_{k_{j-1}<k\le k_j} |x_{N_j}(k)| - \sum_{k\le k_{j-1}} |x_{N_j}(k)| - \sum_{k>k_j} |x_{N_j}(k)|$$

$$= \sum_k |x_{N_j}(k)| - 2\sum_{k\le k_{j-1}} |x_{N_j}(k)| - 2\sum_{k>k_j} |x_{N_j}(k)|$$

$$\ge \delta - \frac{2}{5}\delta - \frac{2}{5}\delta = \frac{\delta}{5}$$

$\frac{\delta}{5} \le 0$, ASSURDO! DEV'ESSERE $x_n \longrightarrow 0$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ LA SEGUENTE MAPPA $A \in \mathcal{L}(\ell_1, \ell_2)$ È SURIETTIVA MA NON HA INVERSO DESTRO ($\Rightarrow$ Ker $A \lhd \ell_1$ NON HA COMPLEMENTARE)

PRENDO $\{a_n\}$ DENSA NELLA PALLA UNITÀ DI ℓ_2

$$\ell_1 \xrightarrow{A} \ell_2$$

$x \longrightarrow \sum^{\infty} a_n x(n) = \Big(\dots$

$$x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x(n) = \left(\sum a_n(1) x(n), \sum a_n(2) x(n), \dots \right)$$

A È BEN DEFINITA PERCHÉ

$$\|Ax\|_{\ell_2} = \left\| \sum a_n x(n) \right\|_{\ell_2} \leq \|a_n\|_{\ell_2} \sum |x(n)| = \|a_n\| \, \|x\| < +\infty$$

$\Rightarrow$ A È CONTINUA

MOSTRO CHE È SURIETTIVA: DATO y, CERCO $x \in \ell_1$: $Ax = y$

PER OMOGENEITÀ, BASTA FARLO VEDERE SE $\|y\| \leq 1$. $\exists n_1 : \|y - a_{n_1}\| \leq \frac{1}{2}$ (PER DENSITÀ)

$y - a_{n_1} \in \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$, $\left\{\frac{a_n}{2}\right\}$ È DENSA IN $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$

$\Rightarrow \exists n_2 : \left\| y - a_{n_1} - \frac{a_{n_2}}{2} \right\| \leq \frac{1}{4}$

RIPETENDO, TROVO $\{a_{n_j}\}$ PER CUI $\left\| y - \underset{\underset{Ae_{n_1}}{\parallel}}{a_{n_1}} - \dots - \underset{\underset{\frac{Ae_{n_j}}{2^j}}{\parallel}}{\frac{a_{n_j}}{2^j}} \right\| \leq \frac{1}{2^{j+1}}$

$$\Rightarrow y = A \left(\sum_j \frac{e_{n_j}}{2^j} \right).$$

INFINE, A <u>NON</u> HA INVERSO DESTRO CONTINUO:

SUPPONIAMO $\exists B \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_1) : AB = I_{\ell_2}$

FISSO $y \in \ell_\infty$, CONSIDERO $x \longrightarrow \sum \underbrace{(Bx)}_{\in \ell_1}(k)\, y(k) \in (\ell_2)^*$

PER RIESZ-FRÉCHET, $\exists$ <u>$z \in \ell_2$</u> TALE CHE $\sum (Bx)(k)\, y(k) = \sum x(k)\, z(k) \quad \forall x \in \ell_2$

SCELGO $x = e_n \Rightarrow \sum (Be_n)(k)\, y(k) = z(n) \longrightarrow 0$

$Be_n \in \ell_1$, DEV'ESSERE $\|Be_n\|_{\ell_1} \longrightarrow 0$ PER IL LEMMA

$\Rightarrow ABe_n \longrightarrow 0$ IN ℓ_2

MA $\|ABe_n\| \underset{\underset{AB = I}{\uparrow}}{=} \|e_n\| = 1$, ASSURDO $\Rightarrow \nexists$ INV. DESTRO CONTINUO.

$c_n \in \mathbb{R}$
$v_n \in X$

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n v_n \right\| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| \, \|v_n\|$$ (*), PERCHÉ?

FISSO N!

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} c_n v_n \right\| = \| c_1 v_1 + \dots + c_N v_N \|$$

$$\le \| c_1 v_1 \| + \dots + \| c_N v_N \|$$

$$= |c_1| \, \|v_1\| + \dots + |c_N| \, \|v_N\| = \sum_{n=1}^{N} |c_n| \, \|v_n\|$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \, \|v_n\|$$

SERIE NUMERICA CONVERGENTE

$$\left\| \sum_{n=M}^{N} c_n v_n \right\| \le \sum_{n=M}^{N} |c_n| \, \|v_n\| \xrightarrow[N,M \to \infty]{} 0$$

(X BANACH)

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n v_n \text{ È CAUCHY} \Rightarrow \text{CONVERGE A } \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$$

PASSANDO AL LIMITE, OTTENGO (*)