I FORMA GEOMETRICA

A CONVESSO APERTO
B CONVESSO $\quad B \cap A = \emptyset$

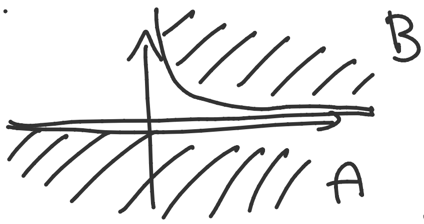
$\Rightarrow$ A, B SONO SEPARATI DA UN IPERPIANO CHIUSO.

II FORMA GEOMETRICA DEL TEOREMA DI HAHN-BANACH

SIANO $A, B \subset X$ CONVESSI DISGIUNTI CHIUSI, DI CUI B COMPATTO. ALLORA, A, B SONO SEPARATI STRETTAMENTE DA UN IPERPIANO CHIUSO.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $X = \mathbb{R}^2$

$A = \{x_2 \leq 0\}$
$B = \{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq \frac{1}{x_1}\}$



A, B CHIUSI CONVESSI, $A \cap B = \emptyset$
SEPARATI DA $\{x_2 = 0\}$
NON SEPARATI STRETTAMENTE

DIM CONSIDERIAMO $k := A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$

k È CONVESSO PERCHÉ LO SONO A, B. MOSTRIAMO CHE k È CHIUSO

SIANO $\{a_n\} \subset A$, $\{b_n\} \subset B$ TALI CHE $\underbrace{a_n - b_n}_{\in k} \longrightarrow x \in X$. VOGLIO MOSTRARE $x \in k$

ESSENDO B COMPATTO, $b_n \to b \in B \Rightarrow a_n \longrightarrow x + b \in X$

ESSENDO A CHIUSO, $x + b \in A \Rightarrow x = \underbrace{x+b}_{\in A} - \underbrace{b}_{\in B} \in A - B = k$

SICCOME $A \cap B = \emptyset$, $0 \notin k$. MA ESSENDO $X \setminus k$ APERTO, $B_\delta(0) \cap k = \emptyset$ PER QUALCHE $\delta > 0$. POSSO APPLICARE LA I FORMA GEOM. CON $B_\delta(0), k$. $\Rightarrow \exists\, L \in X^*$ TALE CHE $Lx \leq Ly$ $\forall x \in k$ $\forall y \in B_\delta(0)$

$L(a-b) \leq \delta L z$ $\quad \forall a \in A\ \forall b \in B \quad \forall z \in B_1(0)$, PASSO ALL'INF $_{z \in B_1(0)}$ $\quad L(a-b) \leq -\delta \|L\|$

$$\underbrace{La + \frac{\delta\|L\|}{2}}_{} \leq Lb \underbrace{- \frac{\delta\|L\|}{2}}_{=-\varepsilon} \qquad \frac{\delta\|L\|}{2} = \varepsilon > 0$$

$\forall a \in A$ $\forall b \in B$ $\Rightarrow$ A, B SONO STRETTAMENTE SEPARATI

COROLLARIO | SIA $E \subset X$ UN SOTTOSPAZIO LINEARE DI UNO

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ SIA $E \subset X$ UN SOTTOSPAZIO LINEARE ~~DENSO~~ DI UNO SPAZIO NORMATO. ALLORA E È DENSO SE E SOLO SE L'UNICO $L \in X^*$ CHE SI ANNULLA SU E SI ANNULLA SU TUTTO X.

DIM SE E È DENSO, PRESO $x \in X$ $\exists \{x_n\} \subset E$ TALE CHE $x_n \to x$ QUINDI SE $L|_E \equiv 0$ ALLORA $Lx = \lim_{n\to\infty} Lx_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ $\Rightarrow Lx = 0$ $\forall x \in X$.

SE $\overline{E}$ NON È DENSO, $\exists x_0 \in X \setminus \overline{E}$. APPLICO LA II FORMA GEOM. CON $A := \overline{E}$ $B := \{x_0\}$ $\Rightarrow \exists L \in X^*$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $Lx < \alpha < Lx_0$ $\forall x \in \overline{E}$

MA $\overline{E}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE, QUINDI $Lx < \alpha$ $\forall x \in \overline{E}$ È POSSIBILE SOLO SE $L|_{\overline{E}} \equiv 0$, IN PARTICOLARE $L|_E \equiv 0$ MENTRE $Lx_0 > 0 = Lx$ $\Rightarrow L \neq 0 \in X^*$

GENERALIZZAZIONE DELL'ORTOGONALITÀ SUI DUALI

$\boxed{\text{DEF}}$ DATO $E \subset X$ SOTTOINSIEME ~~SPAZIO~~ DI UNO SPAZIO NORMATO DEFINISCO $E^\perp := \{L \in X^* : Lx = 0 \ \forall x \in E\}$ ORTOGONALE DI E

DATO $F \subset X^*$, $F^\perp := \{x \in X : Lx = 0 \ \forall L \in F\}$ ORTOGONALE DI F

$\boxed{\text{PROP}}$ DATI $E \subset X$, $F \subset X^*$, VALGONO LE SEGUENTI:

1. $E^\perp \triangleleft X^*$, $F^\perp \triangleleft X$
2. $E \subset E' \Rightarrow E'^\perp \subset E^\perp$
   $F \subset F' \Rightarrow F'^\perp \subset F^\perp$
3. $E^\perp = \overline{\text{SPAN}(E)}^\perp$ $F^\perp = \overline{\text{SPAN}(F)}^\perp$
4. $E^{\perp\perp} = \overline{\text{SPAN}(E)}$
5. $F^{\perp\perp} \supset \overline{\text{SPAN}(F)}$

DIM TUTTO SI DIMOSTRA COME PER GLI HILBERT, TRANNE L'UGUAGLIANZA IN (4). SUPPONIAMO CHE $\exists x_0 \in E^{\perp\perp} \setminus \overline{\text{SPAN}(E)}$

DIM TUTTO SI DIMOSTRA COME PER GLI HILBERT, TRANNE L'UGUAGLIANZA IN ④. SUPPONIAMO CHE $\exists x_0 \in E^{\perp\perp} \setminus \overline{\mathrm{SPAN}(E)}$

APPLICO LA II FORMA GEOMETRICA E SEPARO STRETTAMENTE $\overline{\mathrm{SPAN}(E)}, \{x_0\}$.

$\exists L \in X^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ TALI CHE $Lx < \alpha < Lx_0$ (*) $\forall x \in \overline{\mathrm{SPAN}\, E}$

SICCOME $\overline{\mathrm{SPAN}\, E}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE, DEV'ESSERE $L|_{\overline{\mathrm{SPAN}\, E}} \equiv 0$ CIOÈ $L \in (\overline{\mathrm{SPAN}\, E})^{\perp} = E^{\perp}$, $x_0 \in E^{\perp\perp} \Rightarrow Lx_0 \equiv 0$, CONTRADDIZIONE CON (*)

$\boxed{\text{OSS}}$ SE X È RIFLESSIVO, SI DIMOSTRA $F^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{SPAN}\, F}$ (ALLO STESSO MODO)

SE X NON È RIFLESSIVO, POTREBBE VALERE $\overline{\mathrm{SPAN}\, F} \subsetneq F^{\perp\perp}$

$X = \ell_1 \Rightarrow X^* = \ell_\infty$, $F = c_0 \subset X^*$ (SUCCESSIONI INFINITESIME)

$F^{\perp} = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)\ \forall y \in c_0\} = \{0\}$

INFATTI, SE $x \in F^{\perp}$, PRENDO $y \in e_n \Rightarrow x(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow F^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = X^* \supsetneq \overline{\mathrm{SPAN}\, F} = F$.

UNIFORME LIMITATEZZA PER MAPPE LINEARI

PRELIMINARI: $\underbrace{\text{PRIMA}}_{\text{"MAGRI"}}$ E $\underbrace{\text{SECONDA}}_{\text{"GRASSI"}}$ CATEGORIA

$\boxed{\text{DEF}}$ UN SOTTOINSIEME $A \subset X$ DI UNO SPAZIO METRICO X SI DICE DI <u>PRIMA CATEGORIA</u> IN X SE $\exists \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ TALI CHE $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$. SE A NON È DI PRIMA CATEGORIA IN X, DICO CHE È DI <u>SECONDA CATEGORIA</u> IN X

SE X È DI I CATEGORIA IN SÉ (o II), DICO CHE È DI I CATEGORIA (o II)

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ È DI <u>I CATEGORIA</u> PERCHÉ UNIONE NUMERABILE DI PUNTI, CHE SONO CHIUSI CON INTERNO VUOTO ANCHE ...

① $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ È DI I CATEGORIA PERCHÉ UNIONE NUMERABILE DI PUNTI, CHE SONO CHIUSI CON INTERNO VUOTO, ANCHE $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ È DI I CATEGORIA

② $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$ È DI II CATEGORIA (ESSENDO DISCRETO, NON CI SONO INSIEMI CON INTERNO VUOTO), MA $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ È DI I CATEGORIA PER LO STESSO MOTIVO DI $\mathbb{Q}$ ($\Rightarrow$ DIPENDE DALL'AMBIENTE)

③ $L^2((0,1))\subset L^1((0,1))$ È DI I CATEGORIA. INFATTI,

$$L^2((0,1)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad A_n = \left\{ f\in L^1((0,1)) : \int_0^1 f^2 \le n \right\}$$

A_n È CHIUSO PER IL LEMMA DI FATOU. VERIFICHIAMO CHE $(\mathring{\overline{A_n}} =) \mathring{A_n} = \emptyset$. DATA $f\in A_n$, $f_m = f + \frac{g}{m}$ $\quad g\in L^1((0,1))$, $g\notin L^2((0,1))$

$\Rightarrow$ OGNI $f\in A_n$ È "CIRCONDATA" DA ELEMENTI DI A_n^c $\Rightarrow$ NON È INTERNA.

$f_m \xrightarrow{m\to\infty} f \qquad f_m\notin A_n$

ALLO STESSO MODO, $L^q((0,1))\subset L^p((0,1))$ È DI I CATEGORIA SE $p<q$ $\quad p,q\in[1,+\infty]$

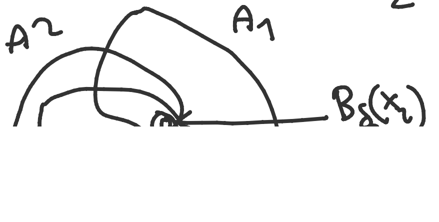
TEOREMA DI BAIRE SIA X UNO SPAZIO METRICO COMPLETO.

SE $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ È UNA SUCCESSIONE DI APERTI DENSI IN X, ANCHE $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ È DENSA.

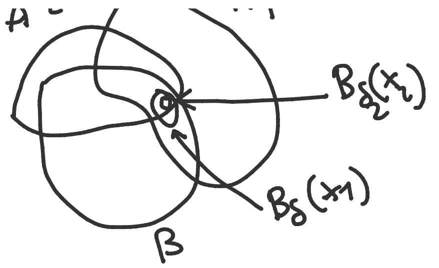
EQUIVALENTEMENTE, SE $\{C_n\}$ È UNA SUCCESSIONE DI CHIUSI CON $\mathring{C_n}=\emptyset$ ALLORA $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ HA INTERNO VUOTO.

IN PARTICOLARE, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq X$, QUINDI X È DI II CATEGORIA IN SÉ.

DIM SIANO $\{A_n\}$ APERTI DENSI E SIA $B\subset X$ APERTO QUALSIASI. SICCOME A_1 È DENSO, $A_1\cap B\neq\emptyset$, INOLTRE $A_1\cap B$ È APERTO, QUINDI $\overline{B_\delta(x_1)}\subset B\cap A_1$. CONSIDERO $A_2\cap B_\delta(x_1)$: $A_2\cap B_\delta(x_1)\neq\emptyset$ PERCHÉ A_2 È DENSO, INOLTRE È APERTO QUINDI $\overline{B_{\delta_2}(x_2)}\subset A_2\cap B_\delta(x_1)$ PER QUALCHE $\delta_2\le\frac{1}{2}$. RIPETO IL RAGIONAMENTO: TROVO



$$\overline{B_{\delta_n}(x_n)}\subset A_n\cap B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1}) \quad \text{CON } \delta_n\le\frac{1}{n}$$



$B_{\delta_n}(x_n) \subset A_n \cap \underline{\overline{B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1})}}$ CON $\underline{\delta_n \leq \frac{1}{n}}$

$m \geq n$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{n \to \infty} \to 0$ PERCHÉ $x_n, x_m \in B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1})$

$\Rightarrow \{x_n\}$ È DI CAUCHY, X È COMPLETO $\Rightarrow x_n \to x \in X$

PER COSTRUZIONE, $x \in \bigcap_n \overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset \bigcap_n A_n \cap B$

$\Rightarrow \bigcap_n A_n \cap B \neq \emptyset$, QUINDI $\bigcap_n A_n$ INTERSECA OGNI APERTO, CIOÈ È <u>DENSO</u>

TEOREMA DI BANACH-STEINHAUS (O DI UNIFORME LIMITATEZZA)

SIANO $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ MAPPE LINEARI CONTINUE DA X SPAZIO DI BANACH A Y SPAZIO NORMATO TALI CHE $\underline{\sup_{\alpha \in I} \|A_\alpha x\|_Y < +\infty}$ $\underline{\forall x \in X}$.

ALLORA $\sup_\alpha \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$

(SI PUÒ ASSUMERE SOLO $\sup_\alpha \|A_\alpha x\| < +\infty$ $\forall x \in B$ PER $B \subset X$ DI II CATEGORIA)

<u>DIM</u> CONSIDERO $C_n := \{x \in X : \|A_\alpha x\| \leq n \ \forall \alpha\} = \bigcap_\alpha \underbrace{\{x \in X : \|A_\alpha x\| \leq n\}}_{\text{CHIUSO PERCHÉ } A_\alpha \text{ CONTINUA}}$ $(n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow C_n$ CHIUSO. INOLTRE, POICHÉ $\sup_\alpha \|A_\alpha x\| < +\infty$ $\forall x$,

$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. DAL TEOREMA DI BAIRE, X È DI II CATEGORIA, DUNQUE NON TUTTI I C_n HANNO INTERNO VUOTO, CIOÈ $B_\delta(x_0) \subset C_{n_0}$ PER QUALCHE $\delta > 0$, $x_0 \in X$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in B_\delta(x_0)$, $\|A_\alpha x\| \leq n_0$ $\forall \alpha \in I$

$x = \delta y + x_0$ $\quad y \in B_1(0)$ $\Rightarrow \|A_\alpha(\delta y + x_0)\| \leq n_0$

$$\|A_\alpha y\| = \frac{\|A_\alpha(\delta y)\|}{\delta} \leq \frac{\|A_\alpha(\delta y + x_0)\| + \|A_\alpha x_0\|}{\delta} \leq \frac{n_0 + \|A_\alpha x_0\|}{\delta}$$

PASSO AL $\sup_{y \in B_1(0)}$ $\Rightarrow$ $\|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{n_0 + \|A_\alpha x_0\|}{\delta}$

PASSO AL $\sup_{\alpha \in I}$ $\Rightarrow$ $\sup_\alpha \|A_\alpha\| \leq \frac{n_0 + \sup_\alpha \|A_\alpha x_0\|}{\delta} < +\infty$ (LIMITATO PER IPOTESI)

OSS | SE X NON È UN BANACH, POTREBBE ESSERE FALSO:

OSS SE X NON È UN BANACH, POTREBBE ESSERE FALSO:

$X = c_{00} = \{$SUCCESSIONI NULLE DEFINITIVAMENTE$\}$ $\quad L_n : X \to \mathbb{R} \quad L_n \in X^*$

$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty$ $\quad x = (c_1 e_1 + \dots + c_k e_k) \to n c_n$

$\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{(c_1, \dots, c_k, 0 \dots 0)}$

FISSATO $x \in X$, $\sup_n |L_n x| < +\infty$

MA $\sup_n \|L_n\|_{X^*} = \sup_n n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

COROLLARIO ① SE X È UN BANACH E $\{L_\alpha\} \subset X^*$ VERIFICA $\sup_\alpha |L_\alpha x| < +\infty \ \forall x \in X$

ALLORA $\sup_\alpha \|L_\alpha\|_{X^*} < +\infty$

② SE X È SPAZIO NORMATO E $\{x_\alpha\} \subset X$ VERIFICA $\sup_\alpha |L x_\alpha| < +\infty \ \forall L \in X^*$

ALLORA $\sup_\alpha \|x_\alpha\|_X < +\infty$ (NON SERVE LA COMPLETEZZA PERCHÉ CONSIDERO $\Lambda_\alpha : L \to L x_\alpha$ $\Lambda \in X^{**}$, X^{**} SEMPRE COMPLETO)

ESEMPI ① SE H È UN HILBERT, $\{x_\alpha\} \subset H$ È TALE CHE $\sup_\alpha |(x_\alpha, y)| < +\infty \ \forall y \in Y$

ALLORA $\sup_\alpha \|x_\alpha\|_H < +\infty$ (APPLICARE BANACH-STEINHAUS A $L_\alpha : H \to \mathbb{R}$, $y \to (x_\alpha, y)$)

② SE $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ VERIFICA $\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x(k) y(k) \right| < +\infty \ \forall y \in \ell_p \quad p \in [1, +\infty]$

ALLORA $x \in \ell_{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$. APPLICO BANACH-STEINHAUS A

$L_n : y \to \sum_{k=1}^{n} x(k) y(k) \quad L_n \in (\ell_p)^* \quad \sup_n |L_n y| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{n} x(k) y(k) \right| < +\infty$ PER IPOTESI

$\Rightarrow$ POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA: $\sup_n \|L_n\|_{(\ell_p)^*} < +\infty$

$$\|x\|_{\ell_{p'}} = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \Rightarrow x \in \ell_{p'}$$