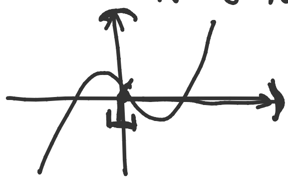
TEOREMA DELLA MAPPA APERTA

OGNI MAPPA $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ LINEARE CONTINUA E <u>SURIETTIVA</u> TRA DUE SPAZI DI BANACH <u>X</u>, <u>Y</u> È <u>APERTA</u>, CIOÈ $A(Z) \subset Y$ È APERTO $\forall Z \subset X$ APERTO.

OSS ① IN GENERALE, $\exists$ MAPPE CONTINUE SURIETTIVE NON APERTE TRA SPAZI DI BANACH $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$



f NON È APERTA PERCHÉ $f((0,+\infty)) = [-\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$

② SE $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ NON È SURIETTIVA, NON È MAI APERTA PERCHÉ <u>$A(X) = \mathrm{RAN}(A)$</u> HA INTERNO VUOTO (SE $B_r(y_0) \subset \mathrm{RAN}(A)$, PER OMOGENEITÀ $\mathrm{RAN}(A) = Y$)

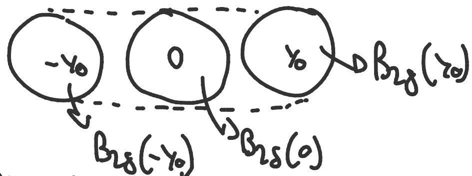
DIM ESSENDO A SURIETTIVA, $Y = A(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A(B_n(0))}$ UNIONE NUMERABILE DI CHIUSI

<u>PASSO 1</u> FACCIO VEDERE $\overline{A(B_1(0))} \supset B_{2\delta}(0)$ PER QUALCHE $\delta > 0$

APPLICO BAIRE A Y: È DI II CATEGORIA, QUINDI ALMENO UNO DEI $\overline{A(B_n(0))}$ CONTIENE UNA PALLA $\overline{A(B_{k_0}(0))} \supset B_{2k_0\delta}(k_0 y_0)$ PER QUALCHE $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $y_0 \in Y$

RISCALANDO, $\overline{A(B_1(0))} \supset B_{2\delta}(y_0)$

PER SIMMETRIA, $\overline{A(B_1(0))} \supset B_{2\delta}(-y_0)$



SICCOME $\overline{A(B_1(0))}$ È CONVESSO, CONTERRÀ L'INVILUPPO CONVESSO DI $B_{2\delta}(y_0) \cup B_{2\delta}(-y_0)$, IN PARTICOLARE $B_{2\delta}(0)$.

<u>PASSO 2</u> $A(B_1(0)) \supset B_\delta(0)$.

FISSO $y \in Y$ CON $\|y\| < \delta$ E VOGLIO $x \in X$ CON $\|x\| < 1$ TALE CHE $\boxed{Ax = y}$

DAL PASSO 1, $B_\delta(0) \subset \overline{A(B_1(0))}$ CIOÈ: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in X$ TALE CHE

DAL PASSO 1, $B_\delta(0) \subset \overline{A(B_{\frac{1}{2}}(0))}$, CIOÈ: $\forall \varepsilon>0$ $\exists x_\varepsilon \in X$ TALE CHE $\|x_\varepsilon\|<\frac{1}{2}$ E $\|y - Ax_\varepsilon\| < \varepsilon$, SCELGO $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ $\Rightarrow$ $\exists x_1$! $\|x_1\|<\frac{1}{2}$, $\|y - Ax_1\| < \frac{\delta}{2}$

$B_{\frac{\delta}{2}}(0) \subset \overline{A(B_{\frac{1}{4}}(0))}$ $\Rightarrow$ RIPETO $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$ $\Rightarrow \exists x_2 : \|x_2\| < \frac{1}{4}$, $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{\delta}{4}$

$y - Ax_1$, RIPETO ... $\exists x_n : \|x_n\| < \frac{1}{2^n}$, $\|y - Ax_1 - \dots - Ax_n\| < \frac{\delta}{2^n}$

$\tilde{x}_n := x_1 + \dots + x_n$, È DI CAUCHY PERCHÉ

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\Big\| \leq \sum_{k\geq n+1} \|x_k\| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow \tilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{x}$$

PERCHÉ X COMPLETO

E $A\tilde{x} = y$ PERCHÉ $\|y - A\tilde{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|y - A\tilde{x}_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\delta}{2^n} = 0$.

PASSO 3 CONCLUSIONE

PRENDO $Z \subset X$ APERTO, FACCIO VEDERE CHE Ax_0 È INTERNO A $A(Z)$ $\forall x_0 \in Z$. $B_r(x_0) \subset Z$ PER QUALCHE $r>0$ $\Rightarrow$

$$A(Z) \supset A(B_r(x_0)) \overset{\text{LIN.}}{=} Ax_0 + A(B_r(0)) \supset Ax_0 + B_{\delta r}(0) \overset{\text{LIN.}}{=} B_{\delta r}(Ax_0).$$

PER OMOGENEITÀ, $A(B_r(0)) \supset B_{\delta r}(0)$

$\Downarrow$

Ax_0 È INTERNO E $A(Z)$ È APERTO

COROLLARI IMPORTANTI

① SE $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ INVERTIBILE TRA DUE SPAZI DI BANACH X Y, ALLORA $A^{-1} : Y \to X$ È CONTINUA $(A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X))$

② SE $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ SONO DUE NORME SU X E $(X, \|\cdot\|_1)$ E $(X, \|\cdot\|_2)$ SONO COMPLETI E $\exists C>0 : \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ $\forall x \in X$, ALLORA $\exists \tilde{C}>0 : \boxed{\|x\|_1 \leq \tilde{C}\|x\|_2}$ $\forall x \in X$

IN PARTICOLARE, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ SONO EQUIVALENTI.

DIM ① DAL TEO. MAPPA APERTA, $Z \subset X$ APERTO IN X $\Rightarrow$ $A(Z)$ APERTO IN Y

MA $A(Z) = (A^{-1})^{-1}(Z)$ PREIMMAGINE RISPETTO ALLA MAPPA A^{-1}

LA PREIMMAGINE DI OGNI APERTO È APERTA $\Rightarrow$ CONTINUITÀ.

(2) CONSIDERO $(X,\|\cdot\|_1)$, $(X,\|\cdot\|_2)$ (SPAZI DI BANACH DISTINTI),

$(X,\|\cdot\|_1) \xrightarrow{A} (X,\|\cdot\|_2)$ "IDENTITÀ CON CAMBIO DI NORMA", PER IPOTESI $\|Ax\|=\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 = C\|x\|$

$x \longrightarrow x$

A È CONTINUA, INVERTIBILE

$(X,\|\cdot\|_2) \xrightarrow{A^{-1}} (X,\|\cdot\|_1)$ $\quad A^{-1}$ È CONTINUA PER (1), CIOÈ:

$x \longrightarrow x$

$$\boxed{\|x\|_1 = \|A^{-1}x\| \leq \tilde{C}\|x\| = \tilde{C}\|x\|_2 .}$$

TEOREMA DEL GRAFICO CHIUSO

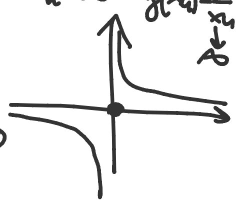
SIA $A: X \to Y$ LINEARE TRA SPAZI DI BANACH.

SE $G_A = \{(x,y) \in X \times Y : y = Ax\}$ È CHIUSO, ALLORA A È CONTINUA

OSS (1) LA MAPPA POTREBBE NON ESSERE CHIUSA IN SENSO TOPOLOGICO (MAPPA CHIUSI IN CHIUSI)

(2) SE A NON È LINEARE, IL TEOREMA È FALSO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_n \to 0$ $\quad f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to \infty$



G_f È CHIUSO MA f NON È CONTINUA. $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(3) SE f CONTINUA, G_f È SEMPRE CHIUSO, PERCHÉ $G_f = \{(x,y) : y - f(x) = 0\}$

$(x,y) \to y - f(x)$ CONTINUA $\quad$ CHIUSO

(4) IL TEOREMA DICE CHE A È CONTINUA SE $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ $\Longrightarrow y = Ax$ $\quad (= \lim_{n\to\infty} Ax_n)$

IN GENERALE, A È CONTINUA SE $x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to Ax$

IL TEOREMA CI PERMETTE DI VERIFICARLO SOLO PER LE SUCCESSIONI PER CUI $Ax_n \to y$

DIM $G_A \triangleleft X \times Y$ PER IPOTESI $\Rightarrow$ È UN BANACH CON LA NORMA INDOTTA DA $X \times Y$: $\|(x,Ax)\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$

$G_A \xrightarrow{\Pi} X$ $\quad$ LINEARE, CONTINUA PERCHÉ $\|\Pi(x,Ax)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|A ...$

INVER...

$G_A \xrightarrow{\Pi} X$ LINEARE, CONTINUA PERCHÉ $\|\Pi(x,Ax)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|(x,Ax)\|$, INVERTIBILE

$(x,Ax) \longrightarrow x$

$\Rightarrow$ PER (1) COROLLARIO L'INVERSA È CONTINUA:

$X \xrightarrow{\Pi^{-1}} G_A$ $\qquad \|\Pi^{-1}x\| \leq \tilde{C}\|x\|$

$x \longrightarrow (x, Ax)$ $\qquad \|\Pi^{-1}x\| = \|x\| + \|Ax\|$ $\qquad \Rightarrow \|Ax\| \leq (\tilde{C}-1)\|x\|$

$\Rightarrow A$ CONTINUA.

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ UN OPERATORE LINEARE $A: X \to X^*$ È CONTINUO SE VERIFICA UNA TRA LE SEGUENTI:

1. $(Ax)y = (Ay)x \quad \forall x,y \in X$ (SIMMETRICO)
2. $(Ax)x \geq 0 \quad \forall x \in X$ (POSITIVO)

(SE X È UN HILBERT, VUOL DIRE $(Ax,y) = (Ay,x)$ OPPURE $(Ax,x) \geq 0$)

$\boxed{\text{DIM}}$ (1) APPLICO IL TEO. GRAFICO CHIUSO: PRENDO $x_n \to x_0$ TALE CHE $Ax_n \to L_0 \in X^*$

VOGLIO $L_0 = Ax_0$, CIOÈ $L_0 x = (Ax_0)x \quad \forall x \in X$

$$\underbrace{(Ax_n)x}_{\downarrow\, L_0 x} = (Ax)x_n \longrightarrow (Ax)x_0 \underset{\text{SIMM.}}{=} (Ax_0)x \qquad \Rightarrow Ax_0 = L_0$$

(2) $x_n - x_0 - \lambda x$ PER $\lambda \in \mathbb{R}$ FISSATO $\Rightarrow \big(\underbrace{A(x_n - x_0 - \lambda x)}_{L_0 - Ax_0 - \lambda Ax}\big)\big(\underbrace{x_n - x_0 - \lambda x}_{-\lambda x}\big) \geq 0$

$$0 \leq (L_0 - Ax_0 - \lambda Ax)(-\lambda x) = -\lambda(L_0 - Ax_0)x + \lambda^2 (Ax)x$$

DIVIDO PER $\lambda \Rightarrow$ $(L_0 - Ax_0)x \leq \lambda(Ax,x) \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} 0$ SE $\lambda > 0$

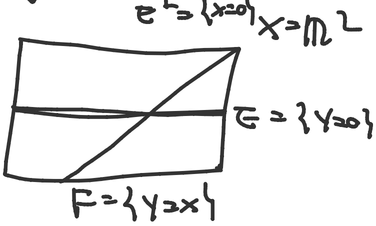
$(L_0 - Ax_0)x \geq \lambda(Ax,x) \xrightarrow[\lambda \to 0^-]{} 0$ SE $\lambda < 0$

$\Rightarrow (L_0 - Ax_0)x = 0 \quad \forall x \in X$, CIOÈ $L_0 = Ax_0$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $E \triangleleft X$, CON X SPAZIO DI BANACH. $F \triangleleft X$ SI DICE UN COMPLEMENTARE DI E SE $X = E \oplus F$, CIOÈ $X = E + F$, $E \cap F = \{0\}$

... COMPLEMENTARE DI E SE $X = E \oplus F$, CIOÈ $X=E+F$, $E\cap F=\{0\}$

(OGNI $x\in X$ SI SCRIVE IN MODO UNICO COME $x=y+z$ CON $y\in E$, $z\in F$)



$F\neq E^\perp$ MA È UN COMPLEMENTARE DI E

ESEMPIO

① NEGLI SPAZI DI HILBERT OGNI $E \triangleleft X$ HA UN COMPLEMENTARE, AD ESEMPIO $E^\perp$

② $X=Y\times Z \Rightarrow E=Y\times\{0\}$ HA PER COMPLEMENTARE $F=\{0\}\times Z$ E VICEVERSA

③ $X=C=$ "SUCCESSIONI CHE HANNO LIMITE" $E=C_0=$ "SUCCESSIONI INFINITESIME" $=\{x:\mathbb{N}\to\mathbb{R} : x(k)\xrightarrow[k\to\infty]{}0\}$

UN COMPLEMENTARE DI C_0 È $F=$ "SUCC. COSTANTI"

$$x\in C \Rightarrow x(k)=\left(x(k)-\lim_{j\to\infty}x(j)\right)+\lim_{j\to\infty}x(j)$$

PROPOSIZIONE $E\triangleleft X$ HA UN COMPLEMENTARE $\iff \exists\, P\in\mathcal{L}(X,E)$ PROIEZIONE (TALE CHE $Px=x$ $\forall x\in E$)

ESEMPIO

① SUGLI HILBERT È LA PROIEZIONE ORTOGONALE

② $X=Y\times Z$ $\quad P(y,z)=(y,0)$
$E=Y\times\{0\}$

③ $X=C$ $\quad E=C_0$ $\quad P: x(k)\longrightarrow x(k)-\lim_{j\to\infty}x(j)$

DIM

($\Rightarrow$) SE E HA UN COMPLEMENTARE F, POSSO SCRIVERE IN MODO UNICO $x=x_E+x_F$. DEFINISCO $Px=x_E$ (LA PROIEZIONE SU F È $x-Px=x_F$)

LINEARITÀ: $\alpha x+\beta y=\alpha x_E+\alpha x_F+\beta y_E+\beta y_F$

$$\alpha x+\beta y = (\alpha x+\beta y)_E+(\alpha x+\beta y)_F$$

$$E\ni(\alpha x+\beta y)_E-\alpha x_E-\beta y_E=\alpha x_F+\beta y_F-(\alpha x+\beta y)_F\in F$$

MA $E\cap F=\{0\}$ SONO ENTRAMBI 0

$(\alpha x+\beta y)_E-\alpha x_E-\beta y_E=0$ CIOÈ $Px=x_E$ È LINEARE

$(\alpha x+\beta y)_E - \alpha x_E - \beta y_E = 0$ CIOÈ $Px = x_E$ È LINEARE SONO ENTRAMBI 0

CONTINUITÀ: USO IL TEO. GRAFICO CHIUSO, SUPPONGO $x_n \to x$, $Px_n \to y$, VOGLIO $y = Px$

$F \ni x_n - Px_n \to x - y \Rightarrow x - y \in F$,

SCRIVO $x = \underset{\in E}{y} + \underset{\in F}{(x-y)}$, MA ANCHE $x = \underset{\in E}{Px} + \underset{\in F}{(x-Px)}$

UNICITÀ DELLA SCRITTURA $\Rightarrow y = Px$.

($\Leftarrow$) SUPPONIAMO $\exists P \in \mathcal{L}(X,E)$, DEFINISCO $F: \{x - Px : x \in X\} = RAN(I-P)$

$X = E + F$ PERCHÉ $x = \underbrace{Px}_{\in E} + \underbrace{x - Px}_{\in F}$

$E \cap F = \{0\}$: SUPPONIAMO $z \in E \cap F$, $z = Px = y - Py$ PER QUALCHE $x, y \in X$

$\Rightarrow P(x+y) = y \Rightarrow y \in RAN(P) \Rightarrow Py = y \Rightarrow z = y - Py \Rightarrow E \cap F = \{0\}$.
$\hookrightarrow$ P È PROIEZIONE

F È CHIUSO: PRENDO $y_n \in F$, $y_n \to y_0$, VOGLIO AVERE $y_0 \in F$

PER DEF. DI F AVRÒ $y_n = x_n - Px_n$ PER QUALCHE x_n

APPLICO $I-P$: $\underset{\downarrow\, y_0 - Py_0}{y_n - Py_n} = (I-P)(x_n - Px_n) = \underset{\downarrow\, y_0}{x_n - Px_n} \cancel{- Px_n + P(Px_n)}$

PERCHÉ $P^2 = P$
$Px_n \in E \Rightarrow P(Px_n) = Px_n$

$\Rightarrow y_0 \in RAN(I-P) = F$, CIOÈ F CHIUSO.

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ SE $\dim E < +\infty$, ALLORA E HA UN COMPLEMENTARE

$\boxed{\text{DIM}}$ PER QUANTO APPENA VISTO, BASTA MOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA PROIEZIONE. E HA UNA BASE $\{e_1 \dots e_n\}$, PRENDO LA BASE DUALE $\{L_1, \dots, L_n\}$

$L_i e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. PER HAHN-BANACH POSSO ESTENDERE OGNI L_i

A $\tilde{L}_i \in X^*$. DEFINISCO $Px = (\tilde{L}_1 x) e_1 + \dots + (\tilde{L}_n x) e_n$ LIN. CONTINUA PERCHÉ LO SONO $\tilde{L}_i$.

$x \in E$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (L_1 x) e_1 + \dots + (L_n x) e_n$

... LIN. CONTINUA PERCHÉ LO SONO $\tilde{L}_i$.

$x \in E$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_N e_N = (L_1 x) e_1 + \dots + (L_N x) e_N$

POICHÉ VALE, ALLORA $Px = x$ $\forall x \in E$, CIOÈ P È UNA PROIEZIONE.