ORARIO DEFINITIVO: MAR 14:15-16
VEN 9:30-12

MODALITÀ DI ESAME: ESERCIZI A CASA
+ ORALE

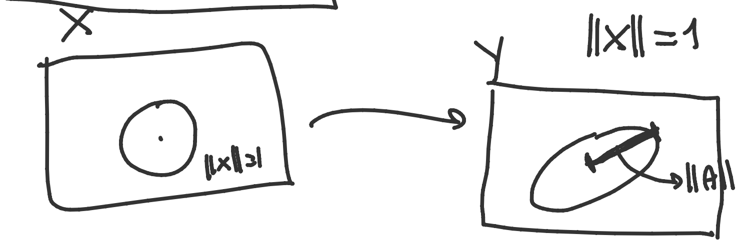
APPLICAZIONI LINEARI E CONTINUE

PROPOSIZIONE SIA $A: X \to Y$ MAPPA LINEARE TRA DUE SPAZI NORMATI X, Y. ALLORA SI EQUIVALGONO:

1. A È CONTINUA
2. A È CONTINUA IN ALMENO UN $x_0 \in X$
3. A È LIMITATA, $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$

"$\|A\|$ È IL MASSIMO FATTORE PER CUI I VETTORI IN X VENGONO DILATATI"

OSSERVAZIONE $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$



DIM ① ⇒ ② OVVIO

② ⇒ ③ SE A È CONTINUA IN x_0, $\exists \delta, \varepsilon > 0$ TALI CHE

$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| \leq \varepsilon$.

FISSO ORA $z \in X$ CON $\|z\| \leq 1$ E STIMO $\|Az\|$:

$$Az = \frac{\|z\|}{\delta} A\left(\frac{\delta}{\|z\|} z\right) = \frac{\|z\|}{\delta}\left(A\left(\frac{\delta}{\|z\|} z + x_0\right) - Ax_0\right)$$

$$Az = \frac{\|z\|}{\delta} A\left(\frac{\delta}{\|z\|} z\right) = \frac{\|z\|}{\delta}\Big(A\underbrace{\left(\frac{\delta}{\|z\|} z + x_0\right)}_{x} - Ax_0\Big)$$

$$\|x - x_0\| = \left\| \frac{\delta}{\|z\|} z \right\| = \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| \leq \varepsilon, \quad \text{CIOÈ:}$$

$$\|Az\| = \left\|\frac{\|z\|}{\delta}(Ax - Ax_0)\right\| \leq \|z\| \frac{\varepsilon}{\delta} \Rightarrow \|A\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < +\infty$$

(3) $\Rightarrow$ (1) FACCIO VEDERE CHE A È LIPSCHITZ CON COSTANTE $\|A\|$

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_Y = \frac{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X} \|x_1 - x_2\|_X \leq \|A\| \, \|x_1 - x_2\|_X$$

$\leq \|A\|$ PERCHÈ $\|A\|$ È IL SUP

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ p,q FISSATI

(1) g FUNZIONE DATA $g \in L^2$ (DEV'ESSERE $q \leq p$)

$$A : L^p(M) \to L^q(M) \qquad \text{DISUG. HÖLDER} \Rightarrow \|Af\|_{L^q} = \|fg\|_{L^q} \overset{(*)}{\leq} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^2}$$

$$f \to fg \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$$

QUANTO VALE $\|A\|$? DA $(*)$ SEGUE CHE $\|A\| \leq \|g\|_{L^2}$

PER FAR VEDERE CHE IN REALTÀ $\|A\| = \|g\|_{L^2}$, TROVO f TALE CHE

$\|Af\|_{L^p} = \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^2}$ (OPPURE $\|f\|_{L^q} = 1$, $\|Af\|_{L^q} = \|g\|_{L^2}$)

IN QUESTO CASO, $f = g\, |g|^{\frac{2}{p} - 1}$

(2) $A : C([0,1]) \to C([0,1]) \qquad h \in L^1([0,1])$

$$f(x) \to \int_0^x f(t) h(t)\, dt$$

$$\|Af\| = \sup_x \left| \int_0^x f(t) h(t)\, dt \right| \leq \sup_x \int_0^x |f||h| \leq \max |f| \cdot \int_0^1 |h| = \|f\| \, \|h\|_{L^1}$$

$\Rightarrow \|A\| \leq \|h\|_{L^1}$. SCEGLIENDO $f = \text{SEGNO}(h)$

OTTENGO $\|f\| = 1$ E $\|Af\| = \|h\|_{L^1}$

OTTENGO $\|f\| = 1$ E $\|Af\| = \|h\|_{L^1}$

$\Rightarrow \|A\| = \|h\|_{L^1}$.

$\mathcal{L}(X,Y) = \{A : X \to Y$ LINEARI CONTINUE$\}$ <u>NOTAZIONE</u>

SE $X=Y$, SCRIVO $\mathcal{L}(X)\ (= \mathcal{L}(X,X))$

$\mathcal{L}(X,Y)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE: $A+B : x \to Ax+Bx$
$(A, B \in \mathcal{L}(X,Y),\ \alpha \in \mathbb{R})$ $\alpha A : x \to \alpha Ax$

$\mathcal{L}(X,Y)$ È UNO SPAZIO NORMATO CON $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$
NORMA OPERATORIALE

$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ È UNO SPAZIO DI BANACH?

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ SE <u>Y È UN BANACH</u>, LO È ANCHE $\mathcal{L}(X,Y)$.

<u>DIM</u> PRENDO $\{A_n\}$ DI CAUCHY IN $\mathcal{L}(X,Y)$, FACCIO VEDERE CHE $A_n \to A$ RISPETTO A $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ PER QUALCHE $A \in \mathcal{L}(X,Y)$

FISSO $x \in X$, $\{A_n x\}$ È DI CAUCHY: $\|A_n x - A_m x\| \leq \underbrace{\|A_n - A_m\|}_{\to 0} \|x\|$

POICHÉ Y È UN BANACH, $A_n x \longrightarrow A(x)$ PERCHÉ A_n CAUCHY

$A(x)$ È <u>LINEARE</u>: $A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y)$
$= \alpha A(x) + \beta A(y)$

A È <u>CONTINUO</u>: FISSO $\varepsilon > 0$ TALE CHE $\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n x - A_N x\| + \|A_N x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n - A_N\| \|x\| + \|A_N\| \|x\|$

$\leq (\varepsilon + \|A_N\|) \|x\|$

$\Rightarrow \|A\| \leq \varepsilon + \|A_N\| < +\infty$

$$\Rightarrow \|A\| \leq \varepsilon + \|A_N\| < +\infty \qquad\qquad \leq \underline{(\varepsilon + \|A_N\|)}\,\|x\|$$

A È IL LIMITE ALLA NORMA $\|\cdot\|$

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A_n x - Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \lim_{m\to\infty} \|A_n x - A_m x\|$$

$$\leq \cancel{\sup_{\|x\|\leq 1}} \left(\limsup_{m\to\infty} \|A_n - A_m\| \right) \cancel{\|x\|}$$

$\leq \varepsilon$ SE $n,m \geq N$ PERCHÉ A_n È CAUCHY

OSSERVAZIONE

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B\circ A"'] & Y \arrow[r, "B"] & Z \end{tikzcd}$$

SE $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$
ALLORA $B\circ A \in \mathcal{L}(X,Z)$

$$\|B\circ A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "A\circ A"'] & X \arrow[r, "A"] & X \end{tikzcd}$$

SE $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A^2\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|^2_{\mathcal{L}(X)}$, $\|A^N\| \leq \|A\|^N$

ISOMETRIE

MAPPE CHE MANTENGONO LA NORMA "EQUIVALENTE" TRA SPAZI NORMATI

DEFINIZIONE UNA MAPPA LINEARE $\phi: X \to Y$ TRA SPAZI NORMATI SI DICE <u>ISOMETRIA</u> SE $\boxed{\|\phi(x)\|_Y = \|x\|_X}$ $\forall x \in X$.

OSSERVAZIONE SE ϕ È UN'ISOMETRIA, $\|\phi\| = 1 < +\infty \Rightarrow \phi$ CONTINUA
INOLTRE, ϕ È INIETTIVA PERCHÉ SE $\phi(x) = 0 \Rightarrow \|x\| = \|\phi(x)\| = 0 \Rightarrow x = 0$
<u>SE ϕ È SURIETTIVA</u>, ANCHE ϕ^{-1} È UN'ISOMETRIA.

DEFINIZIONE SE $\exists\, \phi: X \to Y$ ISOMETRIA SURIETTIVA, X e Y ...

DEFINIZIONE SE $\exists\, \phi: X \to Y$ ISOMETRIA SURIETTIVA, X E Y SI DICONO **ISOMETRICI**

INTUITIVAMENTE, ϕ SURIETTIVA $\Rightarrow$ Y È UNA COPIA DI X

ϕ NON SURIETTIVA $\Rightarrow$ Y CONTIENE UNA COPIA DI X

ESEMPI ① ISOMETRIA SURIETTIVA $L^p([0,1]) \to L^p([a,b])$ $p \in [1,+\infty]$

$$f(x) \to f((b-a)x+a) \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

② ISOMETRIA NON SURIETTIVA

$\ell_p \longrightarrow \ell_p$ "SHIFT DESTRO"

$$(x(1), x(2), \ldots) \longrightarrow (0, x(1), x(2), \ldots)$$

DEFINIZIONE DATO UNO SPAZIO NORMATO X, IL SUO DUALE È $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ $p < +\infty$

ESEMPI ① $X = L^p(\mu)$ $\quad \exists$ ISOMETRIA SURIETTIVA $L^{p'}(\mu) \longleftrightarrow X^*$

μ σ-FINITA

$$g \longleftrightarrow L: f \to \int f g \, d\mu$$

② $X = C(K)$ $\quad \exists$ ISOMETRIA SURIETTIVA $\mathcal{M}(K) \longrightarrow X^*$

$K \subseteq \mathbb{R}^N$ COMPATTO

$$\mu \longrightarrow L: f \to \int_K f \, d\mu$$

$\mathcal{M}(K)$: MISURE CON SEGNO

PRODOTTO SCALARE

DEFINIZIONE UN PRODOTTO SCALARE È UNA MAPPA $(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{R}$ SU UNO SPAZIO VETT. H CHE VERIFICA:

① SIMMETRIA $(x,y) = (y,x)$ $\quad \forall x, y \in H$

② LINEARITÀ: FISSO y, $x \to (x,y)$ È LINEARE, CIOÈ:

$(\alpha x+\beta z, y) = \alpha(x,y) + \beta(z,y) \quad \forall x,y,z \in H \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

③ POSITIVITÀ $(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

OSSERVAZIONE SE HO UN PRODOTTO SCALARE SU H, $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ È UNA NORMA SU H

VALGONO LE PROPRIETÀ:

$(x,y) \leq \|x\|\|y\|$ (DISUG. CAUCHY-SCHWARTZ)

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (REGOLA D. PARALLELOGRAMMA)

$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ SE $(x,y)=0$ (TEOREMA DI PITAGORA)

$(x,y) = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$ (IDENTITÀ DI POLARIZZAZIONE)

DEFINIZIONE UNO SPAZIO CON PRODOTTO SCALARE CHE È UN BANACH RISPETTO ALLA NORMA $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ SI DICE SPAZIO DI HILBERT

ESEMPI ① $L^2(\mu)$ È UNO SPAZIO DI HILBERT CON $(f,g) = \int_X fg \, d\mu$

IN PARTICOLARE, $\mathbb{R}^N$ È UNO SP. DI HILBERT CON $(x,y) = \sum_{k=1}^{N} x(k)y(k)$

E ANCHE ℓ_2 CON $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\,y(k)$

② NON SONO SPAZI DI HILBERT $L^p(\mu)$ CON $p \neq 2$ PERCHÉ NON VALE LA REGOLA D. PARALLELOGRAMMA.

$(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^2})$ NON È HILBERT PERCHÈ NON È COMPLETO.

ORTOGONALITÀ

DEFINIZIONE DUE VETTORI $x,y \in H$ DI UNO SPAZIO CON PRODOTTO SCALARE SI DICONO ORTOGONALI SE $(x,y)=0$, SI INDICA $x \perp y$

DATO $E \subset H$ DEFINISCO IL SUO ORTOGONALE COME

SI DICONO ORTOGONALI SE $(x,y)=0$, SI INDICA $x \perp y$

DATO $E \subset H$, DEFINISCO IL SUO ORTOGONALE COME

$$E^{\perp} = \{x \in H : (x,y) = 0 \quad \forall y \in E\}$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ 1) $H = \ell_2$ $\qquad E = \{e_1 = (1,0 \dots 0 \dots)\}$

$$E^{\perp} = \{x \in \ell_2 : x(1) = 0\} = \{(0, x(2), x(3), \dots) : \sum_{k=2}^{\infty} x(k)^2 \}$$

2) $H = L^2([-1,1])$ $\qquad E = \{$FUNZIONI PARI Q.O.$\} = \{f(x) = f(-x) \text{ Q.O. } x\}$

$E^{\perp} = \{$FUNZIONI DISPARI Q.O.$\} = \{f(x) = -f(-x) \text{ Q.O. } x\}$

$\boxed{\text{LEMMA}}$ SIA H SPAZIO CON PRODOTTO SCALARE E SIA $E \subset H$, ALLORA:

1) $E^{\perp} \triangleleft H$

2) $E \cap E^{\perp} = \begin{cases} \emptyset & \text{SE } 0 \notin E \\ \{0\} & \text{SE } 0 \in E \end{cases}$

3) $E \subset F \Rightarrow F^{\perp} \subset E^{\perp}$

4) $E^{\perp} = \left(\overline{\text{SPAN } E}\right)^{\perp}$

5) $\overline{\text{SPAN } E} \subset E^{\perp\perp}$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ $\quad \text{SPAN } E = \{c_1 x_1 + \dots + c_N x_N : c_i \in \mathbb{R},\ x_i \in E\}$

"COMBINAZIONI LINEARI <u>FINITE</u>" DI ELEMENTI DI E (SOTT. LINEARE)

$\overline{\text{SPAN } E}$ = "COMBINAZIONI LINEARI INFINITE" (SOTT. LINEARE CHIUSO)

IL + PICCOLO CONTENENTE E