

Nome:	Cognome:	Matricola:
-------	----------	------------

Esame di Analisi I - 31/08/2026 *

Esercizio 1 (5 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula

$$(a+1)^n \geq a^n + 2^{n-1}. \quad (a = 3, 4, 5, 6)$$

Soluzione: Per $n = 1$ vale la formula perché $(a+1)^1 = a+1 = a^1 + 2^{1-1}$; supponendo poi che sia vera per n , varrà anche per $n+1$ perché

$$(a+1)^{n+1} = (a+1)(a+1)^n \geq (a+1)a^n + (a+1)2^{n-1} \geq aa^n + 22^{n-1} = a^{n+1} + 2^n.$$

Esercizio 2 (5 punti) Trovare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \log(ax+b) \leq 1, \sqrt{a^2x^2 + 3(b-2)^2} + 2ax < 0 \right\}, \quad (a = 2, 3, b = 3, 4, 5)$$

stabilendo se si tratta, rispettivamente, di massimo e/o di minimo.

Soluzione: La prima condizione equivale a $-\frac{b-1}{a} \leq x \leq -\frac{b-2}{a}$, mentre la seconda equivale a $x < -\frac{b-2}{a}$, dunque
 $A = \left[-\frac{b-1}{a}, -\frac{b-2}{a} \right] \cap \left(-\infty, -\frac{b-2}{a} \right) = \left[-\frac{b-1}{a}, -\frac{b-2}{a} \right)$ e quindi $\inf A = \min A = -\frac{b-1}{a}$ e $\sup A = -\frac{b-2}{a}$
e non c'è il massimo.

*ISTRUZIONI:

Scrivere nome, cognome e numero di matricola.

Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.

Non usare libri, appunti né calcolatrici.

Il tempo a disposizione è di tre ore.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^6(\sqrt[3]{x})}{1 - \cos \frac{x}{x+a}}. \quad (a = \pm 1, \pm 2)$$

Soluzione:

$$\frac{\arctan^6(\sqrt[3]{x})}{1 - \cos \frac{x}{x+a}} = \frac{\arctan^6(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x})^6} \frac{(x+a)^2}{\frac{1 - \cos \frac{x}{x+a}}{\left(\frac{x}{x+a}\right)^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2a^2.$$

Esercizio 4 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x-a}, \quad (a = 1, 2, 3, 4)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita quando l'argomento dell'arcoseno è compreso tra -1 e 1 , cioè

$$\left[-a, \frac{a}{3}\right].$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Dalle proprietà dell'arcoseno si deduce che

$$f(x) > 0 \iff -a < x < 0$$

$$f(x) = 0 \iff x = 0$$

$$f(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{a}{3},$$

e in particolare in grafico di f interseca l'asse orizzontale in $(0, 0)$, e anche l'asse verticale.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{a}{3}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

dunque non ci sono asintoti.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Poiché $f'(x) = -\frac{2a}{(x-a)^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(x-a)^2}}}$ è sempre negativa, deduciamo che

$$\begin{aligned} f(x) & \text{ è decrescente se } a < x < \frac{a}{3} \\ f(x) & \text{ NON ha massimi né minimi.} \end{aligned}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

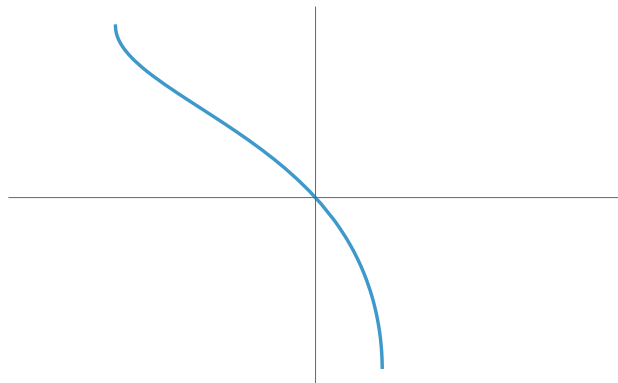
Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = \frac{4a(a^2 - 3x^2)}{(x-a)^5 \left(1 - \frac{4x^2}{(x-a)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ si ottiene che

$$f(x) \text{ è convessa se } x < -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$f(x) \text{ è concava se } -\frac{a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{3}$$

$$f(x) \text{ ha un flesso in } x = -\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione:

Esercizio 5 (5 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{\log 3}{a}}^{\frac{\log 8}{a}} \frac{e^{ax}}{\sqrt{e^{ax} + 1} - a} dx. \quad (a = 4, 5, 6, 7)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\log 3}{a}}^{\frac{\log 8}{a}} \frac{e^{ax}}{\sqrt{e^{ax} + 1} - a} dx &\stackrel{(y=\sqrt{e^{ax}+1})}{=} \int_2^3 \frac{y^2 - 1}{y - a} \frac{2y}{a(y^2 - 1)} dy \\ &= \frac{2}{a} \int_2^3 \left(1 + \frac{a}{y - a} \right) dy \\ &= \frac{2}{a} [y + a \log |y - a|]_2^3 \\ &= \frac{2}{a} + 2 \log \frac{a - 3}{a - 2}. \end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t) + e^{-\frac{\arctan(at)}{a}}}{a^2 t^2 + 1} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (a = 2, 3, 4, 5)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_0^t \frac{1}{a^2 s^2 + 1} ds} \int_0^t e^{-\int_0^s \frac{1}{a^2 r^2 + 1} dr} \frac{e^{-\frac{\arctan(as)}{a}}}{a^2 s^2 + 1} ds \\ &= e^{\frac{\arctan(at)}{a}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{2}{a} \arctan(as)}}{a^2 s^2 + 1} ds \\ &= e^{\frac{\arctan(at)}{a}} \left(-\frac{e^{-\frac{2}{a} \arctan(at)}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^{\frac{\arctan(at)}{a}} - e^{-\frac{\arctan(at)}{a}}}{2} \end{aligned}$$