ANALISI FUNZIONALE

H. BREZIS "ANALISI FUNZIONALE" "FUNCTIONAL ANALYSIS"
+ DISPENSE DELL'ANNO SCORSO

ESAME: $\underbrace{\text{SCRITTO}}_{\text{OPPURE 2 ESONERI}}$ + ORALE

RICEVIMENTO: PER APPUNTAMENTO ONLINE O IN PRESENZA

ANALISI FUNZIONALE = STUDIO DEGLI SPAZI DI FUNZIONI
$C([a,b])$, L^p, ...

STUDIEREMO LE PROPRIETÀ DI QUESTI SPAZI COME SPAZI VETTORIALI E SPAZI TOPOLOGICI

(CONFRONTO CON IL CASO $\mathbb{R}^n$ FINITO-DIMENSIONALE)

APPLICAZIONE: STUDIO DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE SIA X UNO SPAZIO VETTORIALE. UNA SEMINORMA È UNA FUNZIONE $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ TALE CHE:

1. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| \quad \forall x,y \in X$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X$ (OMOGENEITÀ)

SE VALE ANCHE 3. $\|x\|>0 \quad \forall x \neq 0$ (POSITIVITÀ)
DICO CHE $\|\cdot\|$ È UNA NORMA E $(X, \|\cdot\|)$ È UNO SPAZIO NORMATO

OSSERVAZIONE OGNI SPAZIO NORMATO È UNO SPAZIO METRICO CON $d(x,y) := \|x-y\|$, IN PARTICOLARE È UNO SPAZIO TOPOLOGICO

... È UNO SPAZIO TOPOLOGICO

DEFINIZIONE DUE NORME $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ SULLO STESSO SPAZIO VETTORIALE X SI DICONO EQUIVALENTI SE $\exists C>0$ TALE CHE $\frac{\|x\|_1}{C} \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X$ (C NON DIPENDE DA X)

OSSERVAZIONE SE $\dim X < +\infty$, TUTTE LE POSSIBILI SCELTE DI UNA NORMA SU X SONO EQUIVALENTI

DEFINIZIONE UNO SPAZIO NORMATO $(X, \|\cdot\|)$ SI DICE SPAZIO DI BANACH SE È COMPLETO COME SPAZIO METRICO, CIOÈ SE OGNI SUCCESSIONE CHE VERIFICA $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ (DI CAUCHY) CONVERGE A QUALCHE $x \in X$ $\quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

OSSERVAZIONE ① SE $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ SONO NORME EQUIVALENTI SU X, LE SUCC. DI CAUCHY PER $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ SONO LE STESSE, LE SUCC. CONVERGENTI PER $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ SONO LE STESSE. DUNQUE $(X, \|\cdot\|_1)$ È UNO SPAZIO DI BANACH SE E SOLO SE $(X, \|\cdot\|_2)$ È UN BANACH

② DATO UNO SPAZIO DI BANACH X E UN SOTTOINSIEME $E \subset X$, E SARÀ A SUA VOLTA UN BANACH SSE $\begin{cases} E \text{ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI } X \\ E \text{ È CHIUSO} \end{cases}$ NOTAZIONE: $E \underset{\neq}{\triangleleft} X$

(IN GENERALE, $\exists$ SOTT. VETTORIALI NON CHIUSI)

ESEMPI ① GLI SPAZI $L^p(\mu)$ SONO BANACH (X, Σ, μ) SPAZIO MISURA

$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_X |f|$

CONSIDERO GLI ELEMENTI DI $L^p(\mu)$ CLASSI DI FUNZIONI RISPETTO ALLA UGUAGLIANZA Q.O., ALTRIMENTI $\|\cdot\|_p$ È UNA SEMINORMA.

$X = \{1, \dots, N\}$ $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, $\mu = \#$ MISURA CHE CONTA $\Rightarrow \mathbb{R}^N$

$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|x\|_\infty := \max |x(k)|$

$\Rightarrow \mathbb{R}$

$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|x\|_\infty := \max_{k=1\dots N} |x(k)|$

$X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(X)$, $\mu = \#$ $\Rightarrow$ $\ell_p = \left\{ x: \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$

$\ell_\infty = \left\{ x: \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| < \infty \right\}$

② $C([a,b])$ È UNO SPAZIO DI BANACH CON $\|f\| := \max_{[a,b]} |f|$

$C^1([a,b])$ È UNO SPAZIO DI BANACH CON $\|f\| := \max |f'| + \max |f|$

ANALOGAMENTE, $\underset{k \in \mathbb{N} \text{ FISSATO}}{C^k([a,b])}$ $\|f\| := \max |f^{(k)}| + \dots + \max |f|$

③ $(L^p(\mu), \|\cdot\|_q)$ CON $q < p$ SE $\mu(X) < +\infty$ <u>NON</u> È SPAZIO DI BANACH

$(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ CON $q > p$ <u>NON</u> È SPAZIO DI BANACH

DEFINIAMO LE MAPPE TRA SPAZI NORMATI CHE "RISPETTINO" LA STRUTTURA:

VETTORIALE $\longrightarrow$ LINEARI

TOPOLOGICA $\longrightarrow$ CONTINUE

DEFINIZIONE UNA MAPPA $A: X \to Y$ TRA SPAZI VETTORIALI X, Y SI DICE <u>LINEARE</u> SE $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ $\forall x, y \in X$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

NOTAZIONE: SE A È LINEARE, SCRIVO Ax INVECE DI $A(x)$

OSSERVAZIONE: ① SE $\dim X < \infty$ ALLORA OGNI MAPPA LINEARE È CONTINUA:

INFATTI, PRENDO $\{e_1, \dots, e_N\}$, PRENDO $x, y \in X$

$$\|Ay - Ax\| = \left\| A \sum_{k=1}^{N} y(k) e_k - A \sum_{k=1}^{N} x(k) e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{N} (y(k) - x(k)) A e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{N} |y(k) - x(k)| \underbrace{\|Ae_k\|}_{\leq C}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{N} |y(k) - x(k)| = C \|y - x\| \xrightarrow[y \to x]{} 0 \Rightarrow A \text{ È CONTINUA}$$

↳ UNA DELLE POSSIBILI NORME EQUIVALENTI

② IN GENERALE, ESISTONO MAPPE LINEARI NON CONTINUE.

$X = C^1([0,1])$ $\quad \|f\|_X = \|f\|_Y = \max_{[0,1]} |f|$ $\quad A: X \to Y$ OVVIAMENTE LINEARE

$Y = C([0,1])$ $\quad\quad f \mapsto f'$

$Y = C([0,1])$ $\quad \|g\|_Y = \max_{[0,1]} |g|$ $\qquad A: X \to Y$, $f \to f'$ OVVIAMENTE LINEARE

PER MOSTRARE CHE NON È CONTINUA, COSTRUISCO UNA SUCC. $f_n \to 0$ TALE CHE $A f_n \not\to 0 \ (= A0)$ AD ESEMPIO $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

$$\|f_n\| = \max \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0 \qquad A f_n(x) = f_n'(x) = \frac{\cancel{n}\cos(nx)}{\cancel{n}}$$

$$\|A f_n\| = \max |\cos(nx)| = 1 \not\to 0$$

3 ANCHE SE UNA MAPPA LINEARE È CONTINUA (È INVERTIBILE) L'INVERSA POTREBBE NON ESSERLO

$B: Y \to X$ LINEARE, CONTINUA PERCHÉ

$f(x) \to \int_0^x f$

$$\|Bf - Bg\| = \max \left| \int_0^x (f-g) \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x |f-g| = \int_0^1 |f-g|$$
$$\leq \int_0^1 \max |f-g| = \|f-g\| \xrightarrow[g \to f]{} 0$$

B È INIETTIVA $\Rightarrow$ INVERTIBILE SULL'IMMAGINE $\tilde{X} = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$

L'INVERSA DI B È $A: \tilde{X} \to Y$, $f \to f'$ (RESTRIZIONE DELLA MAPPA DI PRIMA) ABBIAMO VISTO CHE NON È CONTINUA