SOLUZIONI DEBOLI DI EQ. DIFFERENZIALE

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \qquad u \in W_0^{1,2}((a,b)) \quad \int_a^b pu'v' + quv = \int_a^b fv \quad \forall v \in W_0^{1,2}$$

$$p \geq \delta > 0 \quad q \geq 0$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $p \equiv 1 \quad q \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} -u'' = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \longrightarrow u(x) = \int_{c_2}^{x} dy \int_{c_1}^{y} f = \int_a^x dy \int_a^y f + Ax + B$

$f \in L^1([a,b]) \Rightarrow u' \in W^{1,1}$

CERCO A,B PER CUI $u \in W_0^{1,2}((a,b))$

$$0 = u(a) = A \cdot a + B$$
$$0 = u(b) = \int_a^b dy \int_a^y f + A \cdot b + B$$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ MATRICE DEI COEFFICIENTI, $DET = a - b \neq 0$

$\Rightarrow$ LA MATRICE È INVERTIBILE $\Rightarrow \exists! (A,B) \Rightarrow \exists! \, u$ SOLUZIONE IN $W_0^{1,2}$

$\boxed{\text{LEMMA}}$ DATI $p \in L^\infty((a,b))$, $q \in L^1((a,b))$, $f \in L^1((a,b))$, DEFINIAMO

$p \geq \delta > 0$, $q \geq 0$

$$F : W_0^{1,2}((a,b)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(*) \quad u \longrightarrow \int_a^b \left(\frac{p}{2} u'^2 + \frac{q}{2} u^2 - fu \right) = \frac{\|u\|^2}{2} - Lu$$

SE u È UN PUNTO DI MINIMO PER F $\left(F(u) \leq F(v) \ \forall v \in W_0^{1,2}((a,b))\right)$ ALLORA u È SOL. DEBOLE DI $\begin{cases} (-pu')' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

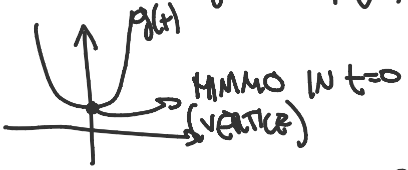
DIM VOGLIO FAR VEDERE CHE $\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1((a,b))$

FISSO $\varphi \in C_0^1 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ AVRÒ $\underline{F(u) \leq F(u + t\varphi)}$

$$F(u+t\varphi) = \int_a^b \frac{p}{2}(u' + t\varphi')^2 + \frac{q}{2}(u + t\varphi)^2 - f(u + t\varphi) = t^2 \int_a^b \left(\frac{p}{2}\varphi'^2 + \frac{q}{2}\varphi^2 \right) +$$

$$+ \, t \underbrace{\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi)}_{b} + \int_a^b \left(\frac{p}{2} u'^2 + \frac{q}{2} u^2 - fu \right)$$

ALLORA $g(t) = F(u + t\varphi)$ HA UN MINIMO IN $t = 0$ E CIOÈ $g'(0) = 0$



MA $g'(0) = \int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi)$

QUINDI $\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1$ CIOÈ u È SOL. DEBOLE

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ DI SOLUZIONI DEBOLI

DATE $p \in L^\infty([a,b])$, $q, f \in L^1((a,b))$ CON $p \geq \delta > 0$ $q \geq 0$ IL FUNZIONALE

TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ DI SOLUZIONI DEBOLI

DATE $p \in L^\infty([a,b])$, $q, f \in L^1((a,b))$ CON $p \geq \delta > 0$ $q \geq 0$, IL FUNZIONALE $F: W_0^{1,2}((a,b)) \to \mathbb{R}$ DEFINITO DA ⊛ HA UN PUNTO DI MINIMO, CHE È L'UNICA SOLUZIONE DEBOLE DI $\begin{cases} (-pu')' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{LEMMA}}$ SIA $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ LIMITATA IN $W_0^{1,2}((a,b))$. ALLORA $\exists\, u \in W_0^{1,2}((a,b))$ TALE CHE $u_n \rightharpoonup u$ IN $W_0^{1,2}((a,b))$ E $u_n \to u$ IN $L^\infty([a,b])$ A MENO DI ESTRATTE

$\boxed{\text{DIM}}$ ESSENDO $\{u_n\}$ LIMITATA $\xRightarrow{\text{BANACH-ALAOGLU}} u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ A MENO DI ESTRATTE, INOLTRE $W_0^{1,2}((a,b))$ È UNO SPAZIO DI HILBERT QUINDI RIFLESSIVO, DUNQUE $u_n \rightharpoonup u$. DAL TEOREMA DI IMMERSIONE DI SOBOLEV COMPATTA, $u_n \to v$ IN L^∞ A MENO DI ESTRATTE. DEVO MOSTRARE $u = v$: DATA $f \in L^1$, $L: u \to \int_a^b fu$ $L \in (W_0^{1,2})^*$ QUINDI POICHÉ $u_n \rightharpoonup u$ ALLORA $\int_a^b f u_n \to \int_a^b fu$, CIOÈ $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ IN L^∞, MA $u_n \to v \Rightarrow u_n \overset{*}{\rightharpoonup} v$ IN $L^\infty \Rightarrow u = v$ PER L'UNICITÀ DEI LIMITI DEBOLI ★

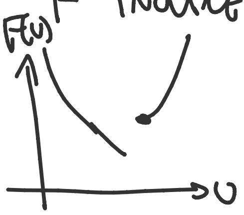
DIM TEO. ESISTENZA E UNICITÀ

PRENDIAMO $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ MINIMIZZANTE, CIOÈ TALE CHE $F(u_n) \to \inf_{W_0^{1,2}} F$

MOSTRIAMO CHE $\inf_{W_0^{1,2}} F > -\infty$ $\quad \|u\|^2_{W_0^{1,2}} := \int_a^b pu'^2 + qu^2$

$$F(u) \overset{\text{HÖLDER}}{\geq} \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}}}{2} - \|f\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty} \overset{\text{(IMMERSIONE DI SOBOLEV)}}{\geq} \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}}}{2} - \|f\|_{L^1} \|u\|_{W_0^{1,2}} \geq -C \Rightarrow \inf_{W_0^{1,2}} F > -\infty$$

F INOLTRE È COERCIVO CIOÈ $F(u) \xrightarrow[\|u\| \to +\infty]{} +\infty$, QUINDI $\{u_n\}$ DEV'ESSERE LIMITATA



BASTA ESCLUDERE CHE F SIA "TROPPO DISCONTINUA"

SAPPIAMO DAL LEMMA CHE $u_n \rightharpoonup u$ IN $W_0^{1,2}$ $\quad u_n \to u$ IN L^∞

$\Downarrow$ SEMICONTINUITÀ INF. DI $\|\cdot\|$ RISPETTO A $\rightharpoonup$ $\qquad \Downarrow$

$$\liminf_{n \to \infty} \int \left(\frac{p}{2}u_n'^2 + \frac{q}{2}u_n^2\right) \geq \int \left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2\right) \qquad \int f u_n \to \int fu$$

METTENDO INSIEME,

$$F(u) = \int_a^b \left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2 - fu\right) \leq \liminf_{n \to \infty} \int_a^b \left(\frac{p}{2}u_n'^2 + \frac{q}{2}u_n^2 - fu_n\right) = \liminf_{n \to \infty} F(u_n) \to \inf_{W_0^{1,2}} F \leq F(u)$$

$\int_a^b (\tfrac{1}{2}\ldots - \tfrac{1}{2}\ldots - fu) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b (\tfrac{1}{2} \ldots \tfrac{1}{2}u_k - fu_k) = \lim_{k\to\infty} F(u_k) \longrightarrow \inf_{W_0^{1,2}} F \le F(u)$

DEV'ESSERE UN'UGUAGLIANZA, CIOÈ $F(u) = \inf_{W_0^{1,2}} F$, DUNQUE U È PUNTO DI MINIMO E SOLUZIONE DEBOLE.

MOSTRIAMO L'UNICITÀ: SE V È UN'ALTRA SOLUZIONE ALLORA $\int_a^b pv'w' + qvw - fw = 0$ $\forall w \in W_0^{1,2}$

INOLTRE $\int_a^b pu'w' + quw - fw = 0$, FACCIO LA DIFFERENZA $\Rightarrow \int p(u'-v')w' + q(u-v)w = 0$

$\Downarrow w = u-v$

$\int p(u'-v')^2 + q(u-v)^2 = 0$

$\Downarrow$

DEV'ESSERE $u = v$

OSS ① SI POTEVA ANCHE FARE QUESTO RAGIONAMENTO.

DATA $f \in L^1([a,b])$, $L: v \to \int_a^b fv$ $\quad L \in W_0^{1,2}([a,b])$

DAL TEOREMA DI RIESZ-FRÉCHET, $\exists!\, u \in W_0^{1,2}([a,b])$ TALE CHE $Lv = (u,v)$, SCEGLIENDO $(u,v) = \int_a^b pu'v' + quv$ OTTENGO $\int_a^b pu'v' + quv = \int_a^b fv$

CIOÈ $\exists!$ SOLUZIONE DEBOLE DELL'EQUAZIONE DIFF.

② LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA FUNZIONA ANCHE PER EQUAZIONI PIÙ GENERALI: POSSO PRENDERE $F(u) = \int_a^b A(x, u'(x)) + V(x, u(x))\,dx$

CON $A, V \in C^1([a,b]\times\mathbb{R})$ $\frac{t^2}{C} \le A(x,t) \le Ct^2$, $\quad V(x,t) \ge -C(1+|t|^q)$ $0<q<2$

DALLE STIME SU A, V SI OTTIENE CHE $F \ge -C$ E LE SUCCESSIONI MINIMIZZANTI SONO LIMITATE, DA $A, V \in C^1$ SI OTTIENE LA CONVERGENZA DELLE MINIMIZZANTI. LA U CHE MINIMIZZA RISOLVE $\begin{cases} (-\partial_t A(x,u'(x)))' + \partial_t V(x,u(x)) = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

CIOÈ $\int_a^b (\partial_t A(x,u(x))\varphi' + \partial_t V(x,u(x))\varphi) = 0$

PER AVERE UNICITÀ DI SOLUZIONI DEVO AVERE A, V CONVESSE IN t, $\forall x$

$f \in L^2([a,b])$, CONSIDERO $L^2([a,b]) \xrightarrow{\tilde{A}} W_0^{1,2}([a,b]) \xrightarrow{i} L^2([a,b])$

$i: W_0^{1,2} \to L^2$ IMMERSIONE $\quad f \longmapsto u$ SOLUZIONE DI $\begin{cases} (-pu')' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

$A := i \circ \tilde{A}$

PROP $\tilde{A}$ È LINEARE, CONTINUO DA L^2 A $W_0^{1,2}$ ED È INIETTIVO

A È LINEARE, COMPATTO DA L^2 A L^2, INIETTIVO, $\int_a^b (Af)g = \int_a^b (Ag)f$ $\quad \forall f, g \in L^2$

$\int_a^b (Af)f > 0 \quad \forall f \ne 0$

DIM

$\tilde{A}$ È BEN DEFINITO E INIETTIVO PER ESISTENZA E UNICITÀ DI SOLUZIONI, SI VEDE FACILMENTE LA LINEARITÀ, VEDIAMO LA CONTINUITÀ:

$\forall v \in W_0^{1,2}$ $\quad \int_a^b p(\tilde{A}f)'v' + q(\tilde{A}f)v = \int_a^b fv$ $(*)$, SCELGO $v = \tilde{A}f$

$$\|\tilde{A}f\|^2_{W_0^{1,2}} = \int p(\tilde{A}f)'^2 + q(\tilde{A}f)^2 = \int_a^b f\tilde{A}f \leq \|f\|_{L^2}\|\tilde{A}f\|_{L^2} \overset{\text{POINCARÉ}}{\leq} C\|f\|_{L^2}\|\tilde{A}f\|_{W_0^{1,2}}$$

$\Rightarrow \|\tilde{A}f\| \leq C\|f\|$ CIOÈ $\tilde{A}$ CONTINUA.

A È FACILMENTE LINEARE, INIETTIVO PERCHÈ LO È $\tilde{A}$, COMPATTO PERCHÈ $\tilde{A}$ CONTINUO, i COMPATTO.

POSITIVITÀ: SCELGO $v = \tilde{A}f \Rightarrow \int_a^b (\tilde{A}f)f = \|\tilde{A}f\|_{W_0^{1,2}} > 0$ SE $f \neq 0$

SIMMETRIA: SCELGO $v = \tilde{A}g \Rightarrow \int (\tilde{A}g)f = (\tilde{A}f, \tilde{A}g)_{W_0^{1,2}} = (\tilde{A}g, \tilde{A}f)_{W_0^{1,2}} = \int_a^b (\tilde{A}f)g$