LEMMA SIA $\{x_n\}$ SUCC. IN ℓ_1 TALE CHE $\underbrace{Lx_n \to 0}$ $\forall L \in \ell_1^*$. ALLORA $x_n \to 0$ IN ℓ_1

DIM $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x_n(k)\, y(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ $\forall y \in \ell_\infty$ (IDEA: $y(k) = 1$ oppure -1)

PER ASSURDO SUPPONIAMO $\underline{\|x_n\| \geq \delta > 0}$.

$n=1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_1(k)| < +\infty$ $\exists K_1$ TALE CHE $\sum_{k=K_1+1}^{\infty} |x_1(k)| \leq \frac{\delta}{5}$

$y = e_k$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

PRENDO UNA SOMMA FINITA $\sum_{k=1}^{K_1} |x_n(k)| \to 0$

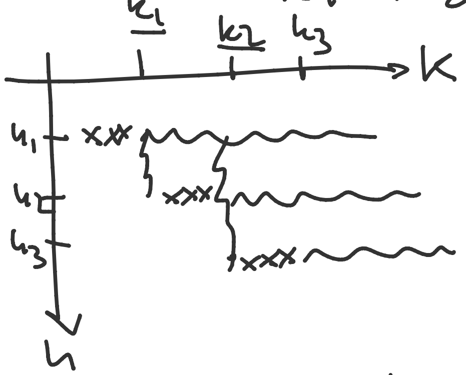
$\exists n_2$ TALE CHE $\sum_{k=1}^{K_1} |x_{n_2}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$

FISSO $n = n_2$ E RIPETO: $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_2}(k)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=K_2+1}^{\infty} |x_{n_2}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$

COME PRIMA, $\exists n_3$ TALE CHE $\sum_{k=1}^{K_2} |x_{n_3}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$ E COSÌ VIA...

TROVO $1 = n_1 < n_2 < \dots$ TALI CHE $\sum_{k=k_j+1}^{\infty} |x_{n_j}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$

$k_1 < k_2 < \dots$ $\sum_{k=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j}(k)| \leq \frac{\delta}{5}$



SCELGO $y(k) = \text{SEGNO}(x_{n_j}(k))$ SE $K_{j-1} < k \leq K_j$

$$0 \leftarrow \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_j}(k)\, y(k)\right| \geq \left|\sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} x_{n_j}(k)\, y(k)\right| - \left|\sum_{k=1}^{k_{j-1}} x_{n_j}(k)\, y(k)\right| - \left|\sum_{k=k_j+1}^{+\infty} x_{n_j}(k)\, y(k)\right|$$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & \vee\!/ & & \vee\!/ \\ \sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} |x_{n_j}(k)| & - & \sum_{k=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j}(k)| & - & \sum_{k=k_j+1}^{+\infty} |x_{n_j}(k)| \end{array}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_j}(k)|}_{\geq \delta} - 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j}(k)|}_{\geq -\frac{2}{5}\delta} - 2 \underbrace{\sum_{k=k_j+1}^{+\infty} |x_{n_j}(k)|}_{\geq -\frac{2}{5}\delta}$$

$$\geq \frac{\delta}{5}$$ CONTRADDIZIONE

CONVERGENZA DEBOLE

PROBLEMA: LE SUCCESSIONI LIMITATE NON SEMPRE HANNO ESTRATTE CONVERGENTI

$\boxed{\text{LEMMA}}$ (DI "QUASI ORTOGONALITÀ") SIA X SPAZIO NORMATO E $E \subset X$ SOTTOSPAZIO LINEARE NON DENSO. ALLORA $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in X$ TALE CHE $\|x_0\| = 1$ E $d(x_0, E) \geq 1 - \varepsilon$.

$\boxed{\text{OSS}}$ SE X È SP. DI HILBERT, BASTA PRENDERE $x_0 \in E^{\perp}$ $(\varepsilon = 0)$

DIM PRENDO $x \in X \setminus \overline{E}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists z \in E$ TALE CHE $0 < \|z - x\| \leq \frac{d(x,E)}{1-\varepsilon}$

SCELGO $x_0 := \frac{x - z}{\|x - z\|}$ $\quad \|x_0\| = 1$, VERIFICHIAMO $\|x_0 - y\| \geq 1 - \varepsilon$ $\forall y \in E$

$$\|x_0 - y\| = \left\| \frac{x - z - y\|x - z\|}{\|x - z\|} \right\| = \frac{\|x - \overbrace{(z + y\|x - z\|)}^{\in E \text{ PERCHÉ } y, z \in E}\|}{\|x - z\|} \geq \frac{d(x,E)}{\|z - x\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ SE $\dim X = +\infty$ ALLORA $\overline{B_1(0)} := \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}$ NON È COMPATTA.

DIM CERCO $\{x_n\}$ SUCCESSIONE IN $\overline{B_1(0)}$ SENZA ESTRATTE CONVERGENTI. SE $\dim X = +\infty$, $\exists \{E_n\}$ SUCCESSIONE DI SOTTOSPAZI CHIUSI STRETTAMENTE CRESCENTE $(E_n \subsetneq E_{n+1})$, APPLICO A CIASCUN E_n IL LEMMA. $(\varepsilon = \frac{1}{2})$ $\exists x_n \in E_n$ TALE CHE $\|x_n\| = 1$ $d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ SE $n > m$ ALLORA $x_m \in E_{n-1}$ CIOÈ $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$

$\Downarrow$ $x_n \in \overline{B_1(0)}$

DUNQUE $\{x_n\}$ NON È CAUCHY E NON CONVERGE

... E NON CONVERGE

DEFINIZIONE SIA X SPAZIO NORMATO, $x \in X$ E $\{x_n\}$ SUCCESSIONE IN X. DICO CHE x_n CONVERGE DEBOLMENTE A x SE $Lx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Lx$ $\forall L \in X^*$. SCRIVIAMO $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$

PROPOSIZIONE ① SE $x_n \to x$ ALLORA $x_n \rightharpoonup x$

② SE $x_n \rightharpoonup x$ ALLORA $\{x_n\}$ È LIMITATA

DIM

① $L \in X^* \Rightarrow |Lx_n - Lx| = |L(x_n - x)| \leq \|L\| \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SE $x_n \to x$

CIOÈ $x_n \rightharpoonup x$.

② SE $Lx_n \to Lx$ $\forall L \in X^*$ ALLORA $\{Lx_n\}$ È LIMITATA

QUINDI PER BANACH-STEINHAUS $\sup_n \|x_n\| < +\infty$.

ESEMPI ① SE $\dim X < +\infty$ ALLORA $x_n \to x \iff x_n \rightharpoonup x$.

DATA $\{e_1 \dots e_N\}$ BASE DI X CONSIDERO $\{L_1 \dots L_N\}$ BASE DUALE DI X^* ($L_i e_j = \delta_{ij}$). SE $x_n \rightharpoonup x$ ALLORA $L_i x_n \to L_i x$ $\forall i = 1 \dots, N$

$x_n = c_{1n} e_1 + \dots + c_{Nn} e_N = (L_1 x_n) e_1 + \dots + (L_N x_n) e_N \to \underbrace{(L_1 x) e_1 + \dots + (L_N x) e_N}_{= x}$

② SE $X = \ell_1$, $x_n \to x \iff x_n \rightharpoonup x$ (VISTO A INIZIO LEZIONE SE $x = 0$, IN GENERALE CONSIDERO $x_n - x$)

③ SE X È UN HILBERT DI DIMENSIONE INFINITA, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SISTEMA ORTONORMALE NON CONVERGE IN NORMA, MA CONVERGE DEBOLMENTE A 0: INFATTI, DALLA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL, $\sum (x, e_n)^2 < +\infty$ $\forall x \in X \Rightarrow (x, e_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall x \in X$ CIOÈ (DAL TEO. DI RIESZ-FRÉCHET) $e_n \rightharpoonup 0$.

④ $X = \ell_p$, CONSIDERO $\{e_n\}$ BASE STANDARD $e_n \rightharpoonup 0$ SE $p \in (1, +\infty)$: FACCIO VEDERE $\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} e_n(k) x(k)}_{= x(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall x \in \ell_{p'}$

SE $x \in \ell_{p'}$ ALLORA $x(n) \to 0$ $\vee$ $\Rightarrow e_n \rightharpoonup 0$

SE $x \in \ell_{p'}$ ALLORA $x(n) \to 0 \ \forall \ x(n) \Rightarrow e_n \rightharpoonup 0$

SE $p=1$ ALLORA e_n NON CONVERGE DEBOLMENTE. SE $e_n \rightharpoonup y$ ALLORA $e_n \to y$ IN NORMA MA $\|e_n - e_m\|_{\ell_1} = 2 \not\to 0$ $\Rightarrow$ NON DI CAUCHY.

TOPOLOGIA DEBOLE

DATO UNO SPAZIO NORMATO X, LA **TOPOLOGIA DEBOLE** SU X È QUELLA GENERATA DAGLI INTORNI

$$V_{L_1 \dots L_N, \varepsilon}(x_0) := \{x \in X ;\ \underbrace{|L_1(x-x_0)| < \varepsilon, \ \dots, \ |L_N(x-x_0)| < \varepsilon}\}$$

AL VARIARE DI $\underbrace{L_1 \dots L_N}_{\text{NUMERO FINITO}} \in X^*$, $\varepsilon > 0$.

NELLA TOPOLOGIA DELLA NORMA, GLI INTORNI SONO LE PALLE $\{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\} = B_\varepsilon(x_0)$ **LIMITATE** IN OGNI DIREZIONE. GLI INTORNI DEBOLI SONO LIMITATI SOLO IN UN NUMERO **FINITO** DI DIREZIONI.

GLI APERTI RISPETTO ALLA TOP. DEBOLE SI CHIAMANO **DEBOLMENTE APERTI**.

LA TOP. DEBOLE SI INDICA CON $\sigma(X, X^*)$

PROPRIETÀ DELLA TOPOLOGIA DEBOLE

1. SE $L \in X^*$ È CONTINUO ANCHE RISPETTO A $\sigma(X,X^*)$, INOLTRE $\sigma(X,X^*)$ È LA TOPOLOGIA MENO FINE PER CUI TUTTI GLI $L \in X^*$ SONO CONTINUI.

DIM. PER LA DEBOLE CONTINUITÀ DI L BASTA FAR VEDERE CHE $L^{-1}\{(a,b)\}$ È APERTO IN $\sigma(X,X^*)$.

$$L \equiv 0 \Rightarrow L^{-1}(a,b) = \begin{cases} X & \text{SE } a<0<b \\ \emptyset & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SE $L \not\equiv 0$ $\exists \, x_0$ PER CUI $Lx_0 = \frac{a+b}{2}$ $\Rightarrow L^{-1}(a,b) = \underbrace{\{x : \frac{a-b}{2} < L(x-x_0) < \frac{b-a}{2}\}}_{U_{L, \frac{b-a}{2}}(x_0)}$ È APERTO IN $\sigma(X,X^*)$

SIA τ TOPOLOGIA PER CUI OGNI $L \in X^*$ È CONTINUO. ALLORA SARANNO APERTI $L^{-1}\{(Lx_0 - \varepsilon, Lx_0 + \varepsilon)\} = U_{L,\varepsilon}(x_0)$

SARANNO APERTE ANCHE LE INTERSEZIONI FINITE

$$U_{L_1,\varepsilon}(x_0) \cap \dots \cap U_{L_N,\varepsilon}(x_0) = U_{L_1 \dots L_N, \varepsilon}(x_0)$$

$\Rightarrow \tau$ CONTIENE TUTTI GLI APERTI DEBOLI CIOÈ È PIÙ FINE DI $\sigma(X,X^*)$.