Nome:	Cognome:	Matricola:

Esonero di Analisi I - 09/11/2026 *

Esercizio 1 (4 punti) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^5}{z^{10}-2a} = \frac{1}{a-2}. \qquad (a = 4, 5, 6, 7)$$

Soluzione: L'equazione equivale a

$$0 = z^{10} - (a-2)z^5 - 2a = \left(z^5 - a\right)\left(z^5 + 2\right),$$

dunque le soluzioni dovranno risolvere $z^5 = a = ae^{i\cdot 0}$ oppure $z^5 = -2 = 2e^{i\pi}$, ossia:

$$\begin{aligned} z = &\quad \sqrt[5]{a}e^{i\frac{2k}{5}\pi}, &\quad k = 0, 1, 2, 3, 4; \\ z = &\quad \sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2k}{5}\pi\right)}, &\quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(x^2+ax\right)}{\sin^6\left(\sqrt[3]{x}\right)}. \qquad (a = \pm 2, \pm 3)$$

Soluzione: Dallo sviluppo di Taylor in 0 delle funzioni seno e coseno si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos\left(x^2+ax\right)}{\sin^6\left(\sqrt[3]{x}\right)} &= \frac{1-\left(1-\frac{\left(x^2+ax\right)^2}{2}+o\left(x^2+ax\right)\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+o\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^6} \\ &= \frac{\frac{\left(x^2+ax\right)^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)} \\ &= \frac{\frac{a^2x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)} \\ &= \frac{\frac{a^2}{2}+o(1)}{1+o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\to} \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

*ISTRUZIONI:
Scrivere nome, cognome e numero di matricola.
Svolgere ciascun esercizio sotto al rispettivo testo; non consegnare altri fogli.
Non usare libri, appunti né calcolatrici.
Il tempo a disposizione è di un'ora e mezza, in cui non si potrà uscire dall'aula, a meno che non si consegni.
La prova è superata totalizzando almeno 9 punti.

Esercizio 3 (6 punti) Studiare graficamente la funzione

$$f(x) = (x-a)^2(x-a-2)e^{-x}, \qquad (a = 1, 2, 3, 4)$$

determinandone:

(1 punto) Insieme di definizione;

Soluzione: La funzione è definita per ogni valore reale, dunque il dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

(1 punto) Segno ed intersezioni con gli assi;

Soluzione: Studiando il segno di ciascun fattore si ottiene che:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{per } x > a+2 \\ f(x) &= 0 \quad \text{per } x = a, a+2 \\ f(x) &< 0 \quad \text{per } x < a, a < x < a+2; \end{aligned}$$

in particolare, il grafico di f interseca l'asse orizzontale in $(a, 0), (a+2, 0)$, e l'asse verticale in $\big(0, -a^2(a+2)\big)$.

(1 punto) Comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

Soluzione: Grazie alla gerarchia degli infiniti si ottiene che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0;$$

dunque, $x = 0$ è un asintoto orizzontale, mentre non ci sono asintoti verticali e, poiché $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, neanche asintoti obliqui.

(1 punto) Intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti;

Soluzione: Studiando il segno di $f'(x) = (a-x)(x-a-1)(x-a-4)e^{-x}$ si deduce che

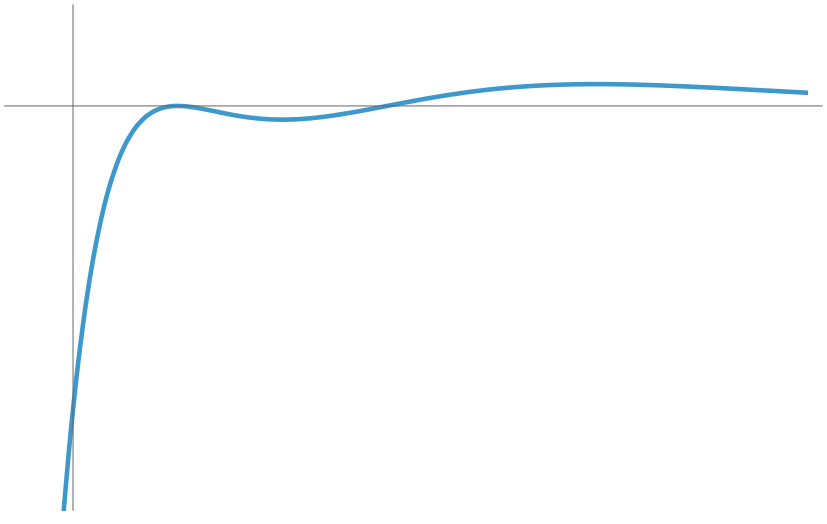
$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è crescente per} & x < a, a+1 < x < a+4 \\ f(x) & \text{è decrescente per} & \text{per } a < x < a+1, x > a+4 \\ f(x) & \text{ha un massimo in} & \text{per } x = a, a+4 \\ f(x) & \text{ha un minimo in} & \text{per } x = a+1. \end{array}$$

(1 punto) Intervalli di concavità e convessità ed eventuali flessi;

Soluzione: Studiando il segno di $f''(x) = (x-a-2)\left(x^2 - (2a+6)x + a^2 + 6a + 2\right)e^{-x}$ si ottiene:

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa per} & a+3-\sqrt{7} < x < a+2, x > a+3+\sqrt{7} \\ f(x) & \text{è concava per} & x < a+3-\sqrt{7}, a+2 < x < a+3+\sqrt{7} \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = a+2, a+3\pm\sqrt{7}. \end{array}$$

(1 punto) Grafico qualitativo.



Soluzione: