Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi 9 del 17-19 Dicembre 2019
Argomento: Serie

Discutere la convergenza e la convergenza assoluta delle seguenti serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2^n+3^n}$;

   La serie è a termini positivi, dunque convergenza e convergenza assoluta si equivalgono. Applicando il criterio della radice si ottiene

   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{2^n+3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{3}\sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}} = \frac{e}{3} < 1,$$

   e dunque la serie converge.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+n}}$;

   La serie è a segni alterni e, poiché $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}}$ è positivo, infinitesimo e decrescente, la serie converge per il criterio per serie alternate. La serie non converge assolutamente per il criterio degli infinitesimi, in quanto

   $$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1.$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

   La serie è a termini positivi, e applicando il criterio del rapporto si ottiene

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^n}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} 3(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{e} >$$

   dunque la serie non converge.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$;

   Scrivendo

$$\ln\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \ln\left(1+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)$$

otteniamo che la serie diverge per il criterio degli infinitesimi, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}} = \frac{1}{2}.$$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$;

Dagli sviluppi $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right), e^x = 1+x+O\left(x^2\right)$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

dunque il termine n-esimo della serie non è infinitesimo e quindi non converge.