Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI 3 DEL 22 OTTOBRE 2019
ARGOMENTO: LIMITI DI SUCCESSIONI

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3}{n^2\arctan n+n\sin n}$;
   Dividendo numeratore e denominatore per n^2 si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3}{n^2\arctan n+n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{\arctan n+\frac{\sin n}{n}}.$$

   Poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$, dalle operazioni con i limiti otterremo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3}{n^2\arctan n+n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\arctan n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\arctan n}=\frac{2}{\pi}.$$

2. $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$;
   Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n}+1}e^{\cos n}$;
   Poiché $\frac{1}{e}\le e^{\cos n}\le e$, allora

$$\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n}+1}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n}+1}e^{\cos n}\le e\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n}+1}.$$

   Essendo $\lim_{n\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n}+1}=+\infty$, dal teorema dei carabinieri concludiamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n}+1}e^{\cos n}=+\infty$.

4. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^n)}{n+\sqrt{n+2}+3}$;
Dalle proprietà dei logaritmi otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n+\sqrt{n+2}+3} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln(e^{-n}+1)}{n+\sqrt{n+2}+3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n+2}+3} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(e^{-n}+1)}{n+\sqrt{n+2}+3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n+2}+3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n+2}}{n}+\frac{3}{n}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

5. $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$;

Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

6. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{n}+4}{n+1}$;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{n}+4}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Quest'ultimo limite tuttavia non esiste perché ad esempio per $n = 4k$ vale 1 mentre per $n = 4k+2$ vale -1, dunque il limite di partenza non esiste.

7. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(n^3+1\right)}{\ln\left(n^2+n\right)}$;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(n^3+1\right)}{\ln\left(n^2+n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{2\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\ln n}}{2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}} = \frac{3}{2}.$$

8. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \dfrac{\ln((n+2)!)-\ln(n!)}{\sqrt{n}}$;

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln((n+2)!)-\ln(n!)}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln\frac{(n+2)!}{n!}}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln((n+2)(n+1))}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+2)}{\sqrt{n}} + \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + ne^n + n^3 2^n}$;

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + ne^n + n^3 2^n} = 3 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + n\left(\frac{e}{3}\right)^n + n^3\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1} = 3.$$