Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi 1 del 10 Ottobre 2019
Argomento: Disequazioni, insiemi di definizione

Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $(x-1)\left(x^2+6\right) > x^3+2$;
   Sviluppando il prodotto a sinistra otteniamo
   $$x^3 - x^2 + 6x - 6 > x^3 + 2,$$
   che equivale a
   $$-x^2 + 6x - 8 > 0,$$
   ovvero
   $$x^2 - 6x + 8 < 0.$$
   Poiché le radici del polinomio $x^2 - 6x + 8$ sono $x = 2$ e $x = 4$, la disequazione equivale a
   $$(x-2)(x-4) < 0.$$
   I singoli fattori hanno i seguenti segni:

	$x < 2$	$2 < x < 4$	$x > 4$
$x - 4$	$-$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-4)$	$+$	$-$	$+$

   Dunque, la disequazione è verificata per $2 < x < 4$.

2. $e^{3x} \geq 1 + 2e^{-3x}$;
   Portando tutti gli addendi a sinistra e raggruppando un fattore comune otteniamo
   $$e^{-3x}\left(e^{6x} - e^{3x} - 2\right) \geq 0.$$
   Poiché il fattore e^{-3x} è sempre positivo, possiamo limitarci a studiare l'altro fattore. Quest'ultimo, attraverso la sostituzione $y = e^{3x}$, equivale al polinomio $y^2 - y - 2$, che ha per radici $y = -1$ e $y = 2$.
   Dunque, possiamo riscrivere la disequazione come
   $$e^{-3x}\left(e^{3x} + 1\right)\left(e^{3x} - 2\right) \geq 0.$$
   A questo punto, anche il secondo fattore è positivo e dunque basterà studiare la positività di $e^{3x} - 2$.
   Quest'ultima è verificata per $x > \frac{\ln 2}{3}$, dunque la disequazione è soddisfatta per $x > \frac{\ln 2}{3}$.

3. $\cos x \left(2\cos^2 x + \sin x - 2\right) \geq 0$;
Innanzi tutto, essendo tutte le quantità periodiche di periodo 2π, basterà studiare la disequazione per $0 \leq x < 2\pi$.
Dall'identità $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$, riscriviamo l'equazione come

$$\cos x \left(\sin x - 2\sin^2 x\right) > 0,$$

che a sua volta si può fattorizzare come

$$(\cos x)(\sin x)(1 - 2\sin x) > 0.$$

I segni dei fattori sono:

	$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
$\cos x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\sin x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$1 - 2\sin x$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\cos x(\sin x)(1 - 2\sin x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Le soluzioni sono dunque $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} < x, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi, \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ (e, più in generale, $2k\pi \leq x \leq \left(2k + \frac{1}{6}\right), \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \leq x \leq \left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi, (2k+1)\pi \leq x \leq \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$ per ogni numero intero k).

Determinare l'insieme di definizione e il segno delle seguenti funzioni:

4. $f(x) = x^5 - 8x^3 - 9x$;
Innanzi tutto, $f(x)$ è ben definita per ogni x reale. Poichè tutti gli addendi hanno il fattore x, possiamo scrivere

$$x\left(x^4 - 8x^2 - 9\right) < 0.$$

Per studiare il secondo fattore, applichiamo la sostituzione $y = x^2$ e consideriamo il polinomio $y^2 - 8y - 9$, che ha per zeri $y = -1$ e $y = 9$; dunque, la disequazione equivale a

$$x\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 9\right) < 0,$$

che a sua volta si scompone in

$$x\left(x^2 + 1\right)(x - 3)(x + 3) < 0.$$

I segni dei vari fattori sono:

	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 + 1$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Dunque, $f(x) > 0$ per $-3 < x < 0$ e $x > 3$; $f(x) = 0$ per $x = -3, 0, 3$ e $f(x) < 0$ per $x < -3$ e $0 < x < 3$.

5. $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x-1}$;
$f(x)$ è definita per i valori di x che non annullano il denominatore, cioè $x \neq 0, 1$.
Per studiarne il segno scriviamo f come un'unica frazione:

$$f(x) = \frac{x(x-1) - (x-1) + 4x}{x(x-1)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x-1)} = \frac{(x+1)^2}{x(x-1)}.$$

A questo punto basta studiare il segno dei singoli fattori del numeratore e del denominatore:

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
Numeratore	$+$	$+$	$+$	$+$
Denominatore	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$

Dunque, $f(x) > 0$ per $x < -1$, $-1 < x < 0$ e $x > 1$, $f(x) = 0$ per $x = -1$ e $f(x) < 0$ per $0 < x < 1$.

6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} - x + 3$;
La funzione è definita per tutte le x per cui $x^2 - 5x + 4 \geq 0$. Fattorizzando abbiamo $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$, dunque l'insieme di definizione è $x \leq 1$ e $x \geq 4$.
La condizione $f(x) \geq 0$ equivale a

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq x - 3.$$

Questa condizione è sempre verificata quando il membro di destra è negativo, cioè (nell'insieme di definizione di $f(x)$) per $x \leq 1$.
La condizione è inoltre verificata quando la quantità sotto radice è maggiore o uguale al quadrato del membro di destra, ovvero

$$x^2 - 5x + 4 \geq (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9,$$

che è verificata per $x \geq 5$.
Dunque, $f(x) > 0$ per $x < 1$ e $x > 5$ e $f(1) = f(5) = 0$.

7. $f(x) = |x - 1| - |2x - 5|$;
$f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Per studiarne il segno, consideriamo innanzi tutto le quantità all'interno dei moduli: per $x \geq \frac{5}{2}$ sono entrambe non-negative, per $x < 1$ sono entrambe negative mentre per $1 \leq x < \frac{5}{2}$ abbiamo $2x - 5 < 0 \leq x - 1$.
Dunque, possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) + (2x-5) & \text{se } x < 1 \\ (x-1) + (2x-5) & \text{se } 1 \leq x < \frac{5}{2} \\ (x-1) - (2x-5) & \text{se } x \geq \frac{5}{2} \end{cases} = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x < 1 \\ 3x - 6 & \text{se } 1 \leq x < \frac{5}{2} \\ 4 - x & \text{se } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Vediamo cosa succede nei tre intervalli in cui varia la definizione di f.
Quando $x < 1$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 4$, ma questo non è mai verificato quindi $f(x) < 0$ per $x < 1$.
Se $1 \leq x < \frac{5}{2}$ allora $f(x) > 0$ se e solo se $x > 2$; dunque, $f(x) < 0$ per $1 \leq x < 2$, $f(x) = 0$ per $x = 2$ e $f(x) > 0$ per $2 \leq x < \frac{5}{2}$.

Infine, per $x \geq \dfrac{5}{2}$ abbiamo $f(x) > 0$ se e solo se $x < 4$, quindi $f(x) < 0$ per $x > 4$, $f(x) = 0$ per $x = 4$ e $f(x) > 0$ per $x > 4$.
Riassumendo, $f(x)$ è positiva per $2 < x < 4$, si annulla in $x = 2$ e $x = 4$ ed è negativa per $x < 2$ e $x > 4$.

8. $f(x) = \sqrt{7 - e^x} - \sqrt{e^x - 3}$;
La funzione è definita quando gli argomenti delle radici sono entrambi maggiori o uguali a 0, cioè $3 \leq e^x \leq 7$, ovvero $\ln 3 \leq x \leq \ln 7$.
$f(x) > 0$ equivale a
$$\sqrt{7 - e^x} > \sqrt{e^x - 3},$$
che equivale a richiedere la stessa disuguaglianza tra gli argomenti delle radici:
$$7 - e^x > e^x - 3.$$
Quest'ultima relazione si verifica per $e^x < 5$, cioè $x < \ln 5$. Analogamente, $f(x) = 0$ per $x = \ln 5$ e $f(x) < 0$ per $x > \ln 5$.
Intersecando con l'insieme di definizione di $f(x)$ otteniamo $f(x) > 0$ per $\ln 3 < x < \ln 5$, $f(x) = 0$ per $x = \ln 5$ e $f(x) < 0$ per $\ln 5 < x < \ln 7$.