Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria delle Tecnologie per il Mare

Esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2019-2020 - Docente: Luca Battaglia

Soluzioni degli esercizi 10 del 19 Dicembre 2019 - 7 Gennaio 2020
Argomento: Serie

Discutere la convergenza e la convergenza assoluta delle seguenti serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n\sqrt{n}}$;

   La serie è a termini positivi, perché $2+\cos n \geq 1$, e converge (assolutamente) dal confronto con la serie armonica generalizzata con esponente $p = \frac{3}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-5\sqrt{n}+7}$;

   La serie converge per il criterio per serie alternate, perché $\frac{1}{n-5\sqrt{n}+7}$ è positiva, infinitesima e inoltre decresce per n grande perché

$$\left(\frac{1}{x-5\sqrt{x}+7}\right)' = -\frac{1-\frac{5}{2\sqrt{x}}}{x-5\sqrt{x}+7},$$

   che è negativo per $x > \frac{25}{4}$. La serie non è assolutamente convergente per il criterio degli infinitesimi, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{n-5\sqrt{n}+7} = 1.$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(e^{-n})$;

   La serie è a termini positivi e converge dal confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{2}{e} < 1$, essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \sin(e^{-n})}{\left(\frac{2}{e}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(e^{-n})}{e^{-n}} = 1.$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln((n+1)!) - \ln(n!)}{\ln(e^n+1)}$;

Riscrivendo il termine n-esimo come

$$\frac{\ln((n+1)!) - \ln(n!)}{\ln(e^n+1)} = \frac{\ln\frac{(n+1)!}{n!}}{\ln(e^n) + \ln(1+e^{-n})} = \frac{\ln(n+1)}{n + \ln(1+e^{-n})},$$

otteniamo che la serie diverge per il criterio degli infinitesimi:

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{\ln(n+1)}{n+\ln(1+e^{-n})} = +\infty.$$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(\sin n))^n$;

La serie converge assolutamente, e dunque converge, per il confronto con la serie geometrica di ragione $x = \sin 1$, che a sua volta converge perché $\sin 1 < 1$: infatti, poiché $|\sin n| \leq 1$ e il seno è una funzione monotona crescente tra 0 e 1, allora

$$|(\sin(\sin n))^n| = |\sin(\sin n)|^n \leq (\sin 1)^n.$$