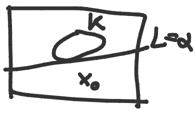
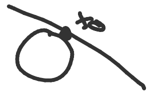
FORME GEOMETRICHE DEL TEOREMA DI HAHN-BANACH

$\boxed{\text{LEMMA}}$ SIA $K \subset X$ SOTT. APERTO CONVESSO DI UNO SP. NORMATO X

E SIA $x_0 \in X \setminus K$. ALLORA x_0 E K SONO SEPARATI



$\boxed{\text{OSS}}$ SE AD ESEMPIO $x_0 \in \partial K$, NON SONO SEPARATI STRETTAMENTE



DIM

POSSO SUPPORRE $0 \in K$, MA K È APERTO $\Rightarrow B_\delta(0) \subset K$ PER QUALCHE $\delta > 0$

INOLTRE K CONVESSO $\Rightarrow$ CONSIDERO $p_K(x)$ FUNZ. MINKOWSKI

APPLICO HAHN-BANACH CON $E = \mathrm{span}\{x_0\}$ $\quad L : E \to \mathbb{R}$ $\quad p = p_K$

VERIFICHIAMO CHE $Lx \leq p(x) \ \forall x \in E$ $\quad t x_0 \to t$

$t \geq 0 \Rightarrow \underline{L(t x_0)} = t \underset{\uparrow}{\leq} t\, p(x_0) = \underbrace{p(t x_0)}_{\hookrightarrow \text{OMOGENEITÀ}}$

$p(x_0) \geq 1$ PERCHÉ $x_0 \notin K$

$t < 0 \Rightarrow L(t x_0) = t < 0 \leq p(t x_0)$.

PER HAHN-BANACH, $\exists\, \tilde{L} : X \to \mathbb{R}$ TALE CHE $\tilde{L} \leq p_K$ E $\tilde{L}(t x_0) = t$

$\{\tilde{L} = 1\}$ SEPARA I DUE INSIEMI:

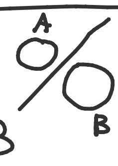
ANZITUTTO, $\tilde{L}$ CONTINUO PERCHÉ $\tilde{L}x \leq p_K(x) \overset{\text{PROPRIETÀ DI } p_K}{\leq} C\|x\| \Rightarrow \|\tilde{L}\| \leq C < +\infty$

$\tilde{L} x_0 = L x_0 = 1$

SE $x \in K$, $p_K(x) < 1$ (PROPRIETÀ DI p_K) $\Rightarrow \tilde{L}x \leq p_K(x) < 1$

$\Rightarrow \tilde{L} \geq 1$ SU $\{x_0\}$, $\tilde{L} \leq 1$ SU K $\Rightarrow$ SEPARATI

TEOREMA (I FORMA GEOMETRICA DI HAHN-BANACH)



SE $A, B \subset X$ SONO CONVESSI, DISGIUNTI E A È APERTO, ALLORA A E B SONO SEPARATI

$\boxed{\text{DIM}}$ APPLICO IL LEMMA CON $x_0 = 0$, $K = A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$

K È APERTO: $\bigcup_{x \in B} (A - x)$ È UNIONE DI APERTI $\Rightarrow$ APERTO

$A - x \hookrightarrow$ APERTO $\forall x$

K È CONVESSO: PRENDO $k_1, k_2 \in K$ $\ t \in [0,1]$ $\quad k_1 = a_1 - b_1$ PER QUALCHE $a_1, a_2 \in A$

$k_2 = a_2 - b_2$ $\quad b_1, b_2 \in B$

K È CONVESSO: PRENDO $k_1, k_2 \in K$, $t \in [0,1]$ $\quad k_1 = a_1 - b_1$, $k_2 = a_2 - b_2$ PER QUALCHE $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$

$$\Rightarrow (1-t)k_1 + tk_2 = \underbrace{(1-t)a_1 + ta_2}_{\in A \text{ PERCHÉ } A \text{ CONVESSO}} - (\overbrace{(1-t)b_1 + tb_2}^{\in B \text{ PERCHÉ } B \text{ CONVESSO}}) \in K$$

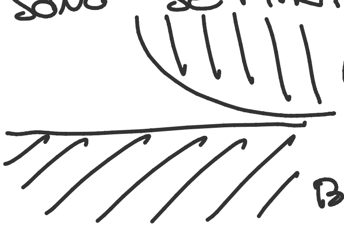
DAL LEMMA, $0 \in A-B$ SONO SEPARATI DA $L \in X^*$, CIOÈ

$$\underset{\substack{\parallel \\ La - Lb}}{Lx} \leq L0 = 0 \quad \forall x \in A-B \quad \Rightarrow La \leq Lb \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B. \quad \Rightarrow A, B \text{ SEPARATI}$$

TEOREMA (II FORMA FONDAMENTALE DI HAHN-BANACH)

SE $A, B \subset X$ SONO CONVESSI DISGIUNTI, A È CHIUSO, B È COMPATTO ALLORA A, B SONO SEPARATI STRETTAMENTE

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$



$A = \{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq \frac{1}{x_1}\}$

$B = \{x_2 \leq 0\}$

CHIUSI CONVESSI DISGIUNTI NON SEPARATI STRETTAMENTE.

$\boxed{\text{DIM}}$ (DELLA II FORMA GEOMETRICA)

$K = A - B$ È CONVESSO PERCHÉ LO SONO A E B, STAVOLTA K È CHIUSO:

INFATTI, SE $\underset{\in A}{a_n} - \underset{\in B}{b_n} \to x \in X$ FACCIO VEDERE $x \in K$. A MENO DI ESTRATTE,

$b_n \to b \in B$ PERCHÉ B È COMPATTO, $a_n = b_n + (a_n - b_n) \to b + x$

POICHÉ A CHIUSO, $b + x \in A \Rightarrow x = (b+x) - b \in A - B = K$

K CHIUSO CONVESSO, $0 \in X \setminus K$ PERCHÉ $A \cap B = \emptyset$, MA $X \setminus K$ APERTO

$\Rightarrow B_\delta(0) \subset X \setminus K$. APPLICO LA I FORMA GEOMETRICA E SEPARO K, $B_\delta(0)$.

$\exists L: Lx \leq Ly \quad \forall x \in K,\ \forall y \in B_\delta(0) \qquad$ CIOÈ $\quad La - Lb \leq \delta Lz \quad \forall a \in A, b \in B,\ \forall z \in B_1(0)$

PASSO ALL'INF$_{z \in B_1(0)}$ $\quad La - Lb \leq -\delta \|L\|$

$$\underbrace{La + \tfrac{\delta}{2}\|L\|}_{\varepsilon} \leq \underbrace{Lb - \tfrac{\delta}{2}\|L\|}_{\varepsilon} \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

$\Rightarrow$ SEPARATI STRETTAMENTE

COROLLARIO | SIA $E \subset X$ SOTT. LINEARE ALLORA E È

COROLLARIO SIA $E\subset X$ SOTT. LINEARE. ALLORA E È DENSO IN X $\Leftrightarrow$ L'UNICO $L\in X^*$ CHE SI ANNULLA IN E È $L\equiv 0$

DIM ($\Rightarrow$) SE $E\subset X$ È DENSO E $L|_E\equiv 0$, FISSO $x\in X$, $\exists x_n\to x$

$$Lx=\lim_{n\to\infty} Lx_n=\lim_{n\to\infty} 0=0 \Rightarrow L\equiv 0 \text{ SU } X$$

($\Leftarrow$) SE $E\subset X$ NON È DENSO, $\exists x_0\in X\setminus\overline{E}$ $\Rightarrow$ SEPARO STRETTAMENTE $A=\overline{E}$, $B=\{x_0\}$ (APPLICO II FORMA GEOMETRICA) $\exists L\in X^*$ TALE CHE $Lx<\alpha<Lx_0$ $\forall x\in\overline{E}$, IN PARTICOLARE $\forall x\in E$, MA E È SOTT. LINEARE $L|_E<\alpha$ È POSSIBILE SOLO SE $L|_E\equiv 0$ MA $Lx_0>\alpha>0\Rightarrow L|_X\not\equiv 0$

$\Rightarrow$ HO TROVATO $L\neq 0\in X^*$ TALE CHE $L|_E\equiv 0$.

ORTOGONALITÀ IN SPAZI DI BANACH

IDEA: SUGLI HILBERT
$x\to(x,y)$ $\quad y\in H$
$\Updownarrow$
$x\to Lx$ $\quad L\in H^*$
POSSO FARLO SEMPRE!

DEF DATO $E\subset X$ SOTT. DI UNO SP. NORMATO

$E^\perp:=\{L\in X^*: Lx=0\ \forall x\in E\}\subset X^*$ È L'**ORTOGONALE** DI E

DATO $F\subset X^*$ SOTT. DEL DUALE X, L'ORTOGONALE DI F È

$F^\perp=\{x\in X: Lx=0\ \forall L\in F\}\subset X$.

PROPOSIZIONE (PROPRIETÀ DEGLI ORTOGONALI)

1. $E\triangleleft X^\perp$, $F\triangleleft X$
2. $E\subset E'\Rightarrow E'^\perp\subset E^\perp$, $F\subset F'\Rightarrow F'^\perp\subset F^\perp$
3. $E^\perp=(\overline{\mathrm{SPAN}\,E})^\perp$, $F^\perp=(\overline{\mathrm{SPAN}\,F})^\perp$
4. $\overline{\mathrm{SPAN}\,E}=E^{\perp\perp}$
5. $\overline{\mathrm{SPAN}\,F}\subset F^{\perp\perp}$

DIM 1, 2, 3, 5 E L'INCLUSIONE IN 4 SI DIMOSTRANO COME PER

DIM ①, ②, ③, ⑤ E L'INCLUSIONE IN ④ SI DIMOSTRANO COME PER GLI HILBERT.

PER L'UGUAGLIANZA IN ④ USO LA II FORMA GEOMETRICA DI H.B.

SUPPONIAMO PER ASSURDO $\exists\, x_0 \in E^{\perp\perp} \setminus \overline{\text{SPAN}\,E}$, SEPARO $\overline{\text{SPAN}\,E}$ E $\{x_0\}$

$\exists\, L \in X^*$: $Lx < \alpha < Lx_0 \quad \forall x \in \text{SPAN}\,E \Rightarrow$ DEV'ESSERE $L|_E \equiv 0$, CIOÈ $L \in E^\perp$
$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \hookrightarrow Lx_0 > \alpha > 0$

$\left.\begin{array}{l} L \in E^\perp \\ x_0 \in E^{\perp\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow Lx_0 = 0$ CONTRADDIZIONE.

OSS. SE X È RIFLESSIVO, $\overline{\text{SPAN}\,F} = F^{\perp\perp}$ $\forall F \subset X^*$ (SI DIMOSTRA COME ④)

SE X NON È RIFLESSIVO, POTREBBE ESSERE $\overline{\text{SPAN}\,F} \subsetneq F^{\perp\perp}$.

$X = \ell_1 \quad X^* = \ell_\infty \quad F = c_0 = \{x \in \ell_\infty : x(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\} \triangleleft \ell_\infty \Rightarrow F = \overline{\text{SPAN}\,F}$

$F^\perp = \{y \in \ell_1 : \sum_{k=1}^\infty x(k)y(k) = 0 \quad \forall x \in c_0\}$

IN REALTÀ $F^\perp = \{0\} \Rightarrow F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = X^* \neq F$

INFATTI, SE $y \in F^\perp$, TEST CON $x = e_k \Rightarrow 0 \underset{y \in F^\perp}{=} \sum x(k)y(k) = y(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow y \equiv 0$, CIOÈ $F^\perp = \{0\}$

SPAZI TOPOLOGICI DI PRIMA E SECONDA CATEGORIA

"MAGRI" — TIPO MISURA $= 0$ $\qquad$ "GRASSI" — TIPO MISURA > 0

DEFINIZIONE UN SOTTOINSIEME $A \subset X$ DI UNO SP. METRICO È DI PRIMA CATEGORIA IN X SE È UNIONE NUMERABILE DI INSIEMI LA CUI CHIUSURA HA INTERNO VUOTO, CIOÈ $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $\mathring{\overline{A_k}} = \emptyset$ $\forall k \in \mathbb{N}$

A È DI SECONDA CATEGORIA IN X SE NON È DI PRIMA CATEGORIA IN X.

ESEMPI ① $\mathbb{Q}$ È DI PRIMA CATEGORIA IN SÉ PERCHÉ $\mathbb{Q} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{q_k\}$

$\{q_n\}$ SONO CHIUSI CON INTERNO VUOTO. ~~Q~~ ANCHE DI PRIMA CATEGORIA IN $\mathbb{R}$

X È DI PRIMA CATEGORIA (IN SÉ) SE $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \mathring{\overline{A_n}} = \emptyset$

SICCOME HO TUTTO X $\quad \underbrace{X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}, \ \mathring{A_n} = \emptyset \quad (A_n = \overline{A_n}$ CHIUSI)

SE VEDO $X \subset Y$ PER QUALCHE Y "PIÙ GRANDE", SE $\mathring{A_n} = \emptyset$ IN X, SARÀ ANCHE $\mathring{A_n} = \emptyset$ IN Y

---

(2) $\mathbb{Z}$ È DI SECONDA CATEGORIA PERCHÉ È DISCRETO: I PUNTI SONO APERTI, ~~∄~~ INSIEMI CON INTERNO VUOTO, MA $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ È DI PRIMA CATEGORIA PERCHÉ NUMERABILE $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z_n\}$ $\quad \{z_n\}$ CHIUSI CON $\mathring{\{z_n\}} = \emptyset$

(·) (·) · · $\mathbb{Z}$

APERTO IN $\mathbb{Z}$, NON IN $\mathbb{R}$

(3) $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ È DI PRIMA CATEGORIA: POSSO SCRIVERE $L^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ CON $A_n = \overline{A_n}$, $\mathring{A_n} = \emptyset$ BASTA PRENDERE $A_n = \{f \in L^1 : \int f^2 \leq n\}$

A_n CHIUSI: PRENDO $f_m \xrightarrow{L^2} f \Rightarrow f_m \xrightarrow{q.o.} f$ (A MENO DI SOTTOSUCC.) $\overset{\text{FATOU}}{\Longrightarrow} \int f^2 \leq \liminf_{m \to \infty} \int f_m^2 \leq n \Rightarrow f \in A_n$

$\mathring{A_n}$: DATA $f \in A_n$, CERCO $f_m \notin A_n$ TALE CHE $f_m \xrightarrow{L^1} f$.

FISSO $g \in L^1 \setminus L^2$, $f_m := f + \frac{g}{m} \notin L^2$, $\|f_m - f\|_{L^1} = \frac{\|g\|_{L^1}}{m} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

LO STESSO VALE PER $L^q \subset L^p$ $\forall p, q \in [1, +\infty]$ CON $p < q$

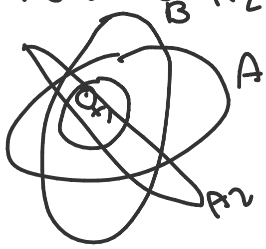
TEOREMA DI BAIRE

SIA X SP. METRICO COMPLETO. ALLORA PER OGNI SUCCESSIONE $\{A_n\}$ DI $(\overline{A_n} = X)$ APERTI DENSI ANCHE L'INTERSEZIONE È DENSA $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = X$

EQUIVALENTEMENTE, PER OGNI SUCCESSIONE $\{C_n\}$ DI CHIUSI CON INTERNO VUOTO, ANCHE L'UNIONE HA INTERNO VUOTO $\quad \mathring{C_n} = \emptyset \quad \mathring{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n} = \emptyset$

IN PARTICOLARE, SE $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, NON POSSONO AVERE TUTTI INTERNO VUOTO, CIOÈ X È DI 2° CATEGORIA

$\boxed{\text{DIM}}$ A_1 È APERTO DENSO, FISSO $B \subset X$ APERTO $\Rightarrow A_1 \cap B \neq \emptyset$ PERCHÉ A_1 DENSO, INOLTRE È APERTO ($\cap$ DI 2 APERTI) $\Rightarrow \exists \overline{B_{\delta_1}(x_1)} \subset A_1 \cap B$ PER QUALCHE $x_1 \in X$, $\delta_1 \leq 1$. RIPETO CON A_2, $B_{\delta_1}(x)$: $A_2 \cap B_{\delta_1}(x_1) \neq \emptyset$ PERCHÉ A_2 È DENSO, È APERTA $\Rightarrow \exists \overline{B_{\delta_2}(x_2)} \subset A_2 \cap B_{\delta_1}(x_1)$ $\delta_2 \leq \frac{1}{2}$



.... TROVO $\overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1}) \cap \underline{A_{n-1}}$ CON $\underline{x_n \in B_{\delta_{n-1}}(x_{n-1})}$

$0 < \delta_n \leq \frac{1}{n}$

x_n È CAUCHY PERCHÉ $d(x_n, x_m) \leq \delta_n \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$ SE $n \leq m$

$\Rightarrow x_n \to x \in X$ PERCHÉ X COMPLETO.

$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap B \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ INTERSECA QUALSIASI APERTO B

$\Rightarrow$ È DENSA.