Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 5 del 7 Dicembre 2018
Argomento: Spazi L^p

1. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura e siano $p,q,r\in[1,+\infty]$ con $p<r<q$.

   (a) Dimostrare che ogni $f\in L^p(\mu)\cap L^q(\mu)$ verifica
   $$\|f\|_r\le\|f\|_p^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}}\|f\|_q^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}};$$
   dedurne che $L^p(\mu)\cap L^q(\mu)\subset\bigcap_{r\in(p,q)}L^r(\mu)$.

   (b) Sia ora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata sia in $L^p(\mu)$ che in $L^q(\mu)$. Dimostrare che se converge a 0 in $L^p(\mu)$ oppure in $L^q(\mu)$ allora converge a 0 anche in $L^r(\mu)$ per ogni $r\in(p,q)$.

   (a) Se $q=+\infty$, allora
   $$\int_X|f|^r\mathrm{d}\mu\le\int_X\|f\|_\infty^{r-p}|f|^p\mathrm{d}\mu\le\|f\|_\infty^{r-p}\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu,$$
   ed elevando i due membri a $\frac{1}{r}$ si ottiene $\|f\|_r\le\|f\|_p^{\frac{p}{r}}\|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}}$. Se invece $q<\infty$, essendo $\frac{1}{q}<\frac{1}{r}<\frac{1}{p}$ possiamo scrivere $\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{q}+\frac{\theta}{p}$ con $\theta=\frac{p(q-r)}{r(q-p)}\in(0,1)$. Applicando poi la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $p'=\frac{p}{\theta r}$ e $q'=\frac{q}{(1-\theta)r}$ otteniamo
   $$\begin{aligned}\int_X|f|^r\mathrm{d}\mu &= \int_X|f|^{\theta r}|f|^{(1-\theta)r}\mathrm{d}\mu\\ &\le \left(\int_X\left(|f|^{\theta r}\right)^{\frac{p}{\theta r}}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\theta r}{p}}\left(\int_X\left(|f|^{(1-\theta)r}\right)^{\frac{q}{(1-\theta)r}}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}\\ &= \left(\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-r}{q-p}}\left(\int_X|f|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{r-p}{q-p}},\end{aligned}$$
   e la conclusione segue elevando a $\frac{1}{r}$. In particolare, se $f\in L^p(\mu)\cap L^q(\mu)$ allora $\|f\|_r<+\infty$ per ogni $r\in(p,q)$ e dunque $f\in\bigcap_{r\in(p,q)}L^r(\mu)$.

   (b) Se $\|f_n\|_p\le C$ e $\|f_n\|_q\underset{n\to+\infty}{\to}0$, allora per ogni $r\in(p,q)$ il punto precedente implica $\|f_n\|_r\le C^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}}\|f_n\|_q^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}}\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Analogamente, se $\|f_n\|_q\le C$ e $\|f_n\|_p\underset{n\to+\infty}{\to}0$ allora $\|f_n\|_r\le C^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}}\|f_n\|_p^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

2. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura e sia f misurabile rispetto a Σ.

(a) Dimostrare che $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$;

(b) Dimostrare che se $f \in L^{p_0}(\mu)$ per qualche p_0 allora $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ e quindi $\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\to} \|f\|_\infty$;

(c) Mostrare con un controesempio che la precedente affermazione è falsa se si toglie l'ipotesi $f \in L^{p_0}(\mu)$.

(d) Dimostrare che se $f \in \bigcap_{p\geq p_0} L^p(\mu)$ allora $\lim_{p\to+\infty} \frac{\int_X |f|^{p+1}\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu} = \|f\|_\infty$.

(a) Per ogni $M \in [0, \|f\|_\infty)$ l'insieme $A_M := \{x \in X : |f(x)| \geq M\}$ ha misura positiva $\mu(A_M) > 0$, dunque

$$\|f_p\| \geq \left(\int_{A_M} |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq (\mu(A_M)M^p)^{\frac{1}{p}} = M(\mu(A_M))^{\frac{1}{p}};$$

per $p \to +\infty$ avremo $(\mu(A_M))^{\frac{1}{p}} \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ se $\mu(A_M) < +\infty$, oppure $(\mu(A_M))^{\frac{1}{p}} \underset{p\to+\infty}{\to} +\infty$, in ogni caso $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq M$; essendo M arbitrario otteniamo $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

(b) Se $f \in L^{p_0}(\mu)$, allora dalla disuguaglianza di Hölder si ha

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p_0}{p}} \left(\int_X |f|^{p_0}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty^{1-\frac{p_0}{p}} \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}}$$

e dunque passando al limite superiore si ottiene $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Combinando con il punto precedente si ottiene

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty,$$

cioè $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(c) Se $\mu(X) = +\infty$, qualsiasi funzione costante $f \equiv c$ appartiene a $L^\infty(\mu)$ ma a nessun $L^p(\mu)$, perché $\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu = |c|^p\mu(X) = +\infty$, dunque $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = +\infty$ ma $\|f\|_\infty = c \neq +\infty$.

(d) Essendo $\int_X |f|^{p+1}\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty \int_X |f|^p\mathrm{d}\mu$, allora

$$\limsup_{p\to+\infty} \frac{\int_X |f|^{p+1}\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu} \leq \|f\|_\infty.$$

Per ottenere l'altra disuguaglianza, utilizziamo il risultato del primo esercizio con $p_0 \leq p \leq p+1$ e otteniamo $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p(p+1-p_0)}} \|f\|_{p+1}^{\frac{(p+1)(p-p_0)}{p(p+1-p_0)}}$, da cui

$$\frac{\int_X |f|^{p+1}\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu} = \frac{\|f\|_{p+1}^{p+1}}{\|f\|_p^p} \geq \frac{\|f\|_{p+1}^{\frac{p+1}{p+1-p_0}}}{\|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p+1-p_0}}};$$

per $p \to +\infty$ il denominatore tenderà a 1 mentre il numeratore, grazie ai punti precedenti dell'esercizio, tenderà a $\|f\|_\infty$, dunque $\liminf_{p\to+\infty} \frac{\int_X |f|^{p+1}\mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu} \geq \|f\|_\infty$, che conclude la dimostrazione.