Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 5 del 7 Dicembre 2018
Argomento: Spazi L^p

1. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ con $p < r < q$.

    (a) Dimostrare che ogni $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ verifica
    $$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\frac{p(q-r)}{r(q-p)}} \|f\|_q^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}};$$
    dedurne che $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subset \bigcap_{r \in (p,q)} L^r(\mu)$.

    (b) Sia ora $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata sia in $L^p(\mu)$ che in $L^q(\mu)$. Dimostrare che se converge a 0 in $L^p(\mu)$ oppure in $L^q(\mu)$ allora converge a 0 anche in $L^r(\mu)$ per ogni $r \in (p, q)$.

2. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e sia f misurabile rispetto a Σ.

    (a) Dimostrare che $\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$;

    (b) Dimostrare che se $f \in L^{p_0}(\mu)$ per qualche p_0 allora $\limsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ e quindi $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\to} \|f\|_\infty$;

    (c) Mostrare con un controesempio che la precedente affermazione è falsa se si toglie l'ipotesi $f \in L^{p_0}(\mu)$.

    (d) Dimostrare che se $f \in \bigcap_{p \geq p_0} L^p(\mu)$ allora $\lim_{p \to +\infty} \frac{\int_X |f|^{p+1} \mathrm{d}\mu}{\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu} = \|f\|_\infty$.