Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 4 del 22 Novembre 2018
Argomento: Spazi ℓ_p

1. Siano ℓ_p definiti da:

$$\begin{aligned} \ell_p &:= \left\{\{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : \|a\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\right\} \\ \ell_\infty &:= \left\{\{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : \|a\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a(k)| < +\infty\right\} \end{aligned}$$

Dimostrare che:

(a) Se $1 \le p \le q \le +\infty$ allora $\|x\|_q \le \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p$, e in particolare $\ell_p \subset \ell_q$.

(b) Lo spazio $(\ell_p, \|\cdot\|_q)$ NON è completo per nessun $p < q$.
(Suggerimento: considerare la successione $a_n(k) := \begin{cases} a(k) & k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$ per un qualche $a \in \ell_q \setminus \ell_p$, ad esempio $a(k) = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}$.)

(c) ℓ_p è separabile per ogni $p < +\infty$.
(Suggerimento: considerare il sottospazio di $X \subset \ell_p$ dato da

$$X := \{a \in \ell_p : a(k) \in \mathbb{Q} \,\forall\, k \in \mathbb{N},\, a(k) = 0 \text{ definitivamente}\}.)$$

(d) Dimostrare che lo spazio delle successioni infinitesime $c_0 \subset \ell_1$ definito da

$$c_0 := \left\{\{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} : a(k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0\right\}$$

è separabile mentre ℓ_∞ NON lo è.
(Suggerimento: mostrare che non è separabile il sottoinsieme $Y \subset \ell_\infty$ definito da

$$Y := \{a \in \ell_\infty : a(k) \in \{0,1\} \,\forall\, k \in \mathbb{N}\}.)$$

(a) Se $q = +\infty$, allora per ogni $a \in \ell_p$ abbiamo $\|a\|_p^p = \sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^p \ge \sup_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^p = \|a\|_\infty^p$. Se invece $q \ge p$, allora

$$\|a\|_q^q = \sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^q \le \|a\|_\infty^{q-p} \sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^p = \|a\|_\infty^{q-p}\|a\|_p^p \le= \|a\|_p^q,$$

e dunque in entreambi i casi $\|a\|_q \le \|a\|_p$; in particolare, se la seconda è finita lo sarà anche la prima e cioè se $x \in \ell_p$ allora $x \in \ell_q$.

(b) La successione a_n indicata nel suggerimento è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_q$, perché per $m \geq n$ abbiamo $a_n(k) - a_m(k) = \begin{cases} a(k) & n+1 \leq k \leq m \\ 0 & k \leq n \text{ oppure } k > m \end{cases}$ e dunque $\|a_n(k) - a_m(k)\|_q^q = \sum_{k=n+1}^{m} |a(k)|^q \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$, perché la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a(k)|^q$ converge.

Tuttavia, se $\|a_n - a\|_q \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per qualche $a \in \ell_p$, allora a verificherebbe $|a(k) - a_n(k)|^q \leq \|a - a_n\|_q^q \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni k, cioè $a(k) = a(k)$, ma questo è impossibile perché $a \notin \ell_p$.

(c) Innanzi tutto, lo spazio X è numerabile perché $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m$ con

$$X_m := \{a \in \ell_p : a(k) = 0 \,\forall\, k > m\},$$

e ogni X_m è una copia di $\mathbb{Q}^m$.

Fissato $a \in \ell_p$ e $\varepsilon > 0$, cerco $a_\varepsilon \in X$ tale che $\|a_\varepsilon - a\|_p \leq \varepsilon$: innanzi tutto prendo k_0 tale che $\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} |a(k)|^q \leq \frac{\varepsilon}{2}$; poi, per $k \leq k_0$, scelgo $a_\varepsilon(k) \in \mathbb{Q}$ tale che $|a_\varepsilon(k) - a(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ e prendo $a_\varepsilon \in X$ data da $a_\varepsilon(k) = \begin{cases} a_\varepsilon(k) & k \leq k_0 \\ 0 & k \geq k_0 + 1 \end{cases}$. Con questa scelta ho

$$\|a_\varepsilon - a\|_p^p = \sum_{k=0}^{k_0} |a_\varepsilon(k) - a(k)|^p + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} |a(k)|^p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^p}{2^{(k+2)p}} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon^p}{2^p(2^p - 1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.,$$

(d) La separabilità di c_0 si fa in maniera analoga a quella degli ℓ_p: dati $a \in c_0$ e ε, prendo k_0 tale che $\sup_{k\geq k_0+1} |a(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e, per $k \leq k_0$, $a_\varepsilon(k) \in \mathbb{Q}$ con $|a_\varepsilon(k) - a(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Quanto a ℓ_∞, notiamo che il sottoinsieme Y indicato nel suggerimento ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, cioè più che numerabile; inoltre, dati $a, a' \in Y$ con $a \neq a'$ esisterà k tale che $a(k) = 1$ e $a'(k) = 0$ (o viceversa), dunque $\|a' - a\|_\infty \geq |a'(k) - a(k)| = 1$. Da questo, segue facilmente che Y non può essere separabile: se infatti esistesse $X \subset Y$ denso e numerabile, allora per ogni $a \in Y$ potrei trovare $x_a \in X$ con $\|x_a - a\|_\infty \leq \frac{1}{3}$, e per $a' \neq a$ avrò $x_{a'} \neq x_a$, perché dalla disuguaglianza triangolare

$$\|x_{a'} - x_a\|_\infty \geq \|a' - a\|_\infty - \|a' - x_{a'}\|_\infty - \|a - x_a\|_\infty \geq \frac{1}{3}.$$

Questo vorrebbe dire che $x_a \neq x_{a'}$, cioè X ha cardinalità non inferiore a quella di Y, ma questo è impossibile perché assumevamo X numerabile mentre Y non lo è.

2. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $a_n(k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$. Dimostrare che:

(a) $\|a_n\|_p = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$;

(b) a_n non ha estratte convergenti per nessun $p \in [1, +\infty]$.

(a) Se $p = +\infty$ abbiamo $\|a_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a(k)| = 1$, se invece $p \in [1, +\infty)$ allora $\|a_n\|_p^p = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_n(k)|^p = 1$.

(b) Se per assurdo fosse $a_{n_j} \underset{j\to+\infty}{\to} a$ per qualche $a \in \ell_p$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ avremmo $\left|a_{n_j}(k) - a(k)\right| \leq \left\|a_{n_j} - a\right\|_p \underset{j\to+\infty}{\to} 0$, cioè $a(k) = \lim_{j\to+\infty} a_{n_j}(k) = 0$, ma questo vorrebbe dire $\left\|a_{n_j}\right\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, in contraddizione con il punto precedente.

3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $a_n(k) = \dfrac{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^k}{n}$.

   (a) Calcolare $\|a_n\|_p$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ e dedurne che $a_n \in \ell_p$ per ogni $p \geq 1$;

   (b) Dimostrare che a_n è limitata in ℓ_p se e solo se $p \geq 2$;

   (c) Dimostrare che a_n converge se e solo se $p > 2$ e trovarne il suo limite.

   (a) Se $p = \infty$ allora $\|a_n\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_n(k)| = a_n(0) = \dfrac{1}{n}$, se invece $p < +\infty$ allora

$$\|a_n\|^p = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_n(k)|^p = \frac{1}{n^p} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(\cos\frac{1}{n}\right)^p\right)^k = \frac{1}{n^p\left(1 - \left(\cos\frac{1}{n}\right)^p\right)},$$

   dunque $\|a_n\|_p = \dfrac{1}{n\left(1 - \left(\cos\frac{1}{n}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, in particolare è finito per ogni p e dunque $a_n \in \ell_p$ per ogni $p \geq 1$.

   (b) Se $p = \infty$ allora $\|a_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ è limitata; se $p < +\infty$, dallo sviluppo asintotico

$$1 - \left(\cos\frac{1}{n}\right)^p \sim 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^p \sim \frac{p}{2n^2}$$

   deduciamo che $\|a_n\|_p \sim \dfrac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} n^{1-\frac{2}{p}}}$, che è limitata se e solo se $p \geq 2$.

   (c) Se $p < 2$ la successione non può convergere perché è illimitata; se invece $p > 2$ allora $\|a_n\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, dunque la successione converge a 0. Resta da far vedere che non c'è convergenza in ℓ_2: se avessimo $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ avremmo $|a_n(k) - a(k)| \leq \|a_n - a\|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, cioè $a(k) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(k) = 0$, ma questo vorrebbe dire che $\|a_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, in contraddizione con i punti precedenti in cui abbiamo ottenuto $\|a_n\|_2 = \dfrac{1}{n\sqrt{1 - \left(\cos\frac{1}{n}\right)^k}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.