Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 3 del 31 Ottobre 2018
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale, completezza

1. Utilizzando opportune serie di funzioni, dimostrare le uguaglianze

$$\int_0^1 \frac{\log\frac{1}{x}}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \qquad \int_0^1 \frac{\log\frac{1}{x}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

Sia $f_n(x) = x^n \log\frac{1}{x}$. Allora, dalla somma della serie geometrica otteniamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \log\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\log\frac{1}{x}}{1-x}$. Inoltre, essendo le f_n a termini positivi per $x \in (0,1)$, si può applicare il teorema della convergenza monotona alla successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$ e scambiare limite e serie ottenendo così $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. Infine, quest'ultimo integrale può essere calcolato per parti:

$$\int_0^1 x^n \log\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\log\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^n}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Per ottenere la seconda uguaglianza consideriamo invece la serie di $(-1)^n f_n(x)$ e proviamo a scambiare limite e integrale per la successione delle somme parziali $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(x)$. Applicando la stima

$$|T_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(x)\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \frac{\log\frac{1}{x}}{1-x}$$

abbiamo trovato una maggiorante per T_n che, per quanto visto in precedenza, è integrabile. Dunque per il teorema di convergenza dominata si può scambiare limite e integrale per T_n, cioè scambiare serie e integrale per $(-1)^n f_n$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\log\frac{1}{x}}{1+x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \log\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k f_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^k f_k(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^n \log\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

2. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura.

   (a) Se μ è completa e f è misurabile rispetto a Σ, allora ogni $g : X \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$ è anch'essa misurabile.

   (b) Se μ non è completa e f è misurabile rispetto a Σ, allora esiste $g : X \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$ ma g non è misurabile.

   (a) Sia μ completa, f misurabile e g che coincide con f all'infuori dell'insieme $N := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ che ha misura nulla. Per ogni aperto $A \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$g^{-1}(A) = \left(g^{-1}(A) \cap N\right) \cup \left(g^{-1}(A) \cap N^c\right) = \left(g^{-1}(A) \cap N\right) \cup \left(f^{-1}(A) \cap N^c\right) :$$

   il primo insieme è contenuto in N, che è misurabile e ha misura nulla, dunque è a sua volta misurabile; il secondo insieme è intersezione di due misurabili, perché f è misurabile e N^c è il complementare di un misurabile, e dunque sarà anch'esso misurabile. $g^{-1}(A)$ è dunque misurabile in quanto unione di due misurabili.

   (b) Supponiamo ora che μ non sia completa, cioè che esista $A \in \Sigma$ con $\mu(A) = 0$ e $N \subset A$ che non appartiene a Σ, e prendiamo f misurabile rispetto a μ. Consideriamo ora $g := f + \chi_N$: coinciderà con f all'infuori di N, e in particolare all'infuori di A che ha misura nulla; se g fosse misurabile, allora lo sarebbe anche $g - f = \chi_N$, ma questo è impossibile perché la sua preimmagine dell'aperto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ è $\chi_N^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = N$ che non è misurabile.

3. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura, $f : X \to \mathbb{R}$ μ-misurabile e

$$A_n := \{x \in X : n \leq |f(x)| < n + 1\}.$$

   Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) f è essenzialmente limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per μ-q.o. $x \in X$;

   (b) $\mu(A_n) > 0$ solo per finiti n;

   (c) Se $g \in L^1(\mu)$ allora anche $fg \in L^1(\mu)$.

   Dimostrare che, assumendo inoltre $\mu(X) < +\infty$, $f \in L^1(\mu)$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) < +\infty$.

   Sia f essenzialmente limitata e M come sopra. Allora per $n \geq M$ abbiamo

$$\mu(A_n) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq M\}) = 0,$$

   e dunque $\mu(A_n) > 0$ al più per $n = 1, \ldots, M$.
   Viceversa, se $\mu(A_n) > 0$ solo per un numero finito, allora $\mu(A_n) = 0$ per $n \geq N_0$, dunque avremo

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \leq N_0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=N_0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=N_0}^{+\infty} \mu(A_n) = 0,$$

   cioè $|f(x)| \leq N_0$ per q.o. $x \in X$.
   Se f è essenzialmente limitata e $g \in L^1(\mu)$ allora

$$\int_X |fg| \mathrm{d}\mu = \int_{\{x \in X : |f(x)| \leq M\}} |fg| \mathrm{d}\mu \leq M \int_x |g| \mathrm{d}\mu < +\infty$$

   e dunque $f \in L^1(\mu)$.
   Viceversa, se f non è essenzialmente limitata, allora esiste una successione $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $n_k \geq k$ e $\mu(A_{n_k}) > 0$. Prendiamo ora una funzione del tipo $g = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \chi_{A_{n_k}}$ e mostriamo che

per una scelta opportuna di c_k avremo $g \in L^1(\mu)$ e $fg \notin L^1(\mu)$: per costruzione abbiamo $\displaystyle\int_X |g|\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \mu(A_{n_k})$, mentre

$$\int_X |fg|\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_{A_{n_k}} |f| \geq \sum_{k=0}^{+\infty} n_k c_k \mu(A_{n_k}) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} k c_k \mu(A_{n_k}).$$

Sarà dunque sufficiente prendere c_k affinché la prima serie converga ma la seconda no, cioè ad esempio $c_k = \dfrac{1}{k^2 \mu(A_{n_k})}$.
Infine, l'ultima equivalenza segue da

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) &\leq \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f\chi_{A_n}\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |f|\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} |f|\mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} (n+1)\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\mu(A_n) \\
&\leq \mu(X) + \sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n).
\end{aligned}$$