Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2018-2019 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 2 del 25 Ottobre 2018
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale

1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Calcolare:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x$;

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)\cos\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x$;

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan|x|\mathrm{d}x$.

2. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura con $\mu(X) < +\infty$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili tali che $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente e che soddisfino la proprietà

   $$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\, M_\varepsilon \text{ tale che } \int_{\{x\in X:\,|f_n(x)|>M_\varepsilon\}} |f_n|\mathrm{d}\mu \le \varepsilon.$$

   Dimostrare, utilizzando la successione $g_n^M(x) = \min\{|f_n(x)|, M\}$, che $\displaystyle\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

3. Sia $r > 0$ fissato, μ una misura Boreliana su $\mathbb{R}$ e finita sui compatti e sia $f(x) := \mu((x-r,x+r))$. Dimostrare che f è inferiormente semi-continua, ovvero che per ogni successione convergente $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ si ha $f(x) \le \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

   Dimostrare, utilizzando la misura di Dirac $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A \\ 0 & \text{se } 0 \notin A \end{cases}$, che la disuguaglianza precedente potrebbe essere stretta.

4. Sia (X,Σ,μ) uno spazio misura e $f : X \to [0,+\infty]$ una funzione $L^1(\mu)$. Dimostrare che:

   (a) L'insieme $A := \{x \in X : f(x) = \infty\}$ ha misura nulla $\mu(A) = 0$.

   (b) L'insieme $B := \{x \in X : f(x) > 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ di insiemi misurabili di misura finita $\mu(B_n) < +\infty$.

   (c) Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile $C_\varepsilon \in \Sigma$ con misura finita $\mu(C_\varepsilon) < +\infty$ e $\displaystyle\int_{X\setminus C_\varepsilon} f\mathrm{d}\mu \le \varepsilon$.