Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 9 – 10 del 16 – 18 Aprile 2018
Argomento: Derivate seconde, studio di funzione

1. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile. Dimostrare che le seguenti affermazioni si equivalgono:

   (a) f è convessa;

   (b) f' è crescente su I;

   (c) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in I$.

   Dedurne che, se f è differenziabile due volte, allora è convessa se e solo se $f'' \geq 0$ su I.

   Supponiamo che f sia convessa. Poiché il rapporto incrementale R_f è crescente, per ogni $x < x_1 < x_2 < y$ abbiamo

   $$R_f(x, x_1) \leq R_f(x_2, x_1) \leq R_f(x_2, y);$$

   dunque passando al limite per $x \to x_1$ e $y \to x_2$ si ottiene che $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.
   Se invece f' è crescente, allora per ogni $x_1 < x_0 < x_2$ si può applicare il teorema di Lagrange e trovare $x_1 < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < x_2$ tali che

   $$R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_1} = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{x_2 - x_1} \geq 0,$$

   e cioè f è convessa.
   Inoltre, se f è convessa, come nel caso precedente si dimostra che $f'(x_1) \leq R_f(x_2, x_1) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ e cioè $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ per ogni x_1, x_2.
   Infine, se $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni x, x_0, allora f ha una retta di appoggio in ogni punto e quindi è convessa.
   Se poi f è derivabile due volte, allora $f'' \geq 0$ se e solo se f' è crescente, che abbiamo appena visto essere equivalente alla convessità.

2. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *strettamente* convessa se vale la disuguaglianza stretta

   $$f(tx_1 + (1 - t)x_2) < tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \qquad \forall\, t \in (0, 1),\ \forall\, x_1, x_2 \in I.$$

   Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

   (a) f è strettamente convessa;

   (b) $R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) > 0$ per ogni $x_1 < x_0 < x_2$;

   (c) $x \mapsto R_f(x, x_0)$ è strettamente crescente in $I \setminus \{x_0\}$, cioè $R_f(x_1, x_0) < R_f(x_2, x_0)$ per ogni $x_1 < x_0 < x_2$.

   Per ogni $x_1 < x_0 < x_2$ possiamo scrivere $x_0 = tx_1 + (1 - t)x_2$ $t = \dfrac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}$ e $1 - t = \dfrac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}$, dunque

   $$f(x_0) = f(tx_1 + (1 - t)x_2) < tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}f(x_2)$$

e cioè

$$R_f^{(2)}(x_2,x_1,x_0) = -\frac{f(x_0) - \frac{x_0-x_2}{x_1-x_2}f(x_1) + \frac{x_1-x_0}{x_1-x_2}f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} > 0,$$

dunque le prime due affermazioni si equivalgono.
Inoltre, $x \mapsto R_f(x,x_0)$ è strettamente crescente se e solo se $0 < \frac{R_f(x_1,x_0) - R_f(x_2,x_0)}{x_1 - x_2} = R_f(x_2,x_1,x_0)$ e dunque la seconda affermazione equivale alla terza.

3. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile. Dimostrare che le seguenti affermazioni si equivalgono:
   (a) f è strettamente convessa;
   (b) f' è strettamente crescente su I;
   (c) $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in I$.

   Dedurne che, se f è differenziabile due volte e $f'' > 0$ su I, allora è strettamente convessa.

   Se f è strettamente convessa, allora fissati comunque $x < x_1 < x_0 < x_2 < y$ abbiamo, per l'esercizio precedente,

$$R_f(x,x_1) < R_f(x_0,x_1) < R_f(x_0,x_2) < R_f(y,x_2).$$

   Passando al limite per $x \to x_1$ e $y \to x_2$ otteniamo

$$f'(x_1) \le R_f(x_0,x_1) < R_f(x_0,x_2) < f'(x_2),$$

   dunque in particolare $f'(x_1) < f'(x_2)$ per ogni $x_1 < x_2$ e dunque f' è strettamente crescente.
   Se invece f' è strettamente crescente, allora dati $x_1 < x_0 < x_2$ esistono, dal teorema di Lagrange, $x_1 < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < x_2$ tali che

$$R_f^{(2)}(x_2,x_1,x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{x_2 - x_1} > 0,$$

   cioè f è strettamente convessa.
   Inoltre, se f è strettamente convessa, come nel caso precedente ho $f'(x_1) \le R_f(x_0,x_1)$ per ogni x_0, x_1, inoltre essendo i rapporti incrementali strettamente crescenti vale anche $R_f(x_0,x_1) < R_f(x_2,x_1)$ e dunque

$$f'(x_1) < R_f(x_2,x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

   ovvero $f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$.
   Se poi vale $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni x, x_0, possiamo riscrivere la disuguaglianza come $R_f(x_1,x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < f'(x_0)$ se $x = x_1 < x_0$. Se invece $x = x_2 > x_0$, allora abbiamo $R_f(x_2,x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} > f'(x_0)$; dunque, per ogni $x_1 < x_0 < x_2$ abbiamo $R_f(x_1,x_0) < R_f(x_2,x_0)$. I rapporti incrementali di f sono dunque strettamente crescenti, condizione equivalente alla stretta convessità.
   Infine, se $f'' > 0$ allora f' è strettamente crescente e dunque f è strettamente convessa.

4. Dimostrare che $f(x) = x^4$ è strettamente convessa e calcolarne f''. Spiegare perché ciò non contraddice i precedenti risultati.

   f è strettamente convessa perché la sua derivata $f'(x) = 4x^3$ è strettamente crescente. La sua derivata seconda è $f''(x) = 4x^2$, che non è strettamente positiva ma si annulla in $x = 0$. Questo non contraddice i precedenti risultati perché la positività della derivata seconda è condizione sufficiente ma non necessaria per la stretta convessità (così come la positività della derivata prima è sufficiente ma non necessaria per la monotonia).

5. Sia f una funzione strettamente convessa. Dimostrare che f ha al più due zeri.
Mostrare esempi di funzioni strettamente convesse aventi rispettivamente due zeri, uno zero, nessuno zero.

Se per assurdo esistessero $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, allora $R_f^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = 0$ e dunque f non sarebbe strettamente convessa.
La funzione $f(x) = x^2 - c$ è strettamente convessa, in quanto è derivabile due volte e $f''(x) = 2 > 0$ per ogni x. Se $c > 0$ ha i due zeri $x = \pm\sqrt{c}$, se $c = 0$ ha l'unico zero $c = 0$ mentre se $c < 0$ non ha zeri.

6. Sia f una funzione strettamente convessa su I. Dimostrare che f non può avere punti di massimo relativo interni ad I.
Dimostrare che se f ha un punto di minimo relativo allora di tratta di un minimo globale stretto.
Dedurne che ogni funzione strettamente convessa o non ha minimo oppure ha un unico minimo globale stretto. Fornire un esempio per ciascun caso.

Supponiamo per assurdo che f abbia un punto di massimo locale x_0 interno ad I. In particolare, per $x_1 < x_0 < x_2$ sufficientemente vicini ad I avremo $f(x_1) \leq f(x_0)$ e $f(x_2) \leq f(x_0)$. Tuttavia, scrivendo $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$ con $t = \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$, dalla stretta convessità otteniamo

$$f(x_0) = f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_0) = f(x_0),$$

che è assurdo.
Supponiamo ora che x_0 sia un minimo locale per f su I, cioè che $f(x) \geq f(x_0)$ se $|x - x_0| < \delta$. Se x_0 non fosse un minimo globale stretto, ci sarebbe un altro $x_1 \in I$ con $f(x_1) \leq f(x_0)$. Allora, per $t \in (0,1)$,

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) < tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_0) = f(x_0),$$

ma per t vicino a 1 avremo $|(tx_0 + (1-t)x_1) - x_0| < \delta$ e dunque $f(tx_0 + (1-t)x_1) \geq f(x_0)$, che è una contraddizione.
Le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$ sono entrambe strettamente convesse. f ha come unico punto di minimo assoluto $x = 0$, mentre g non ha minimi.

7. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *concava* se $-f$ è convessa. f si dice *strettamente* concava se $-f$ è strettamente convessa.
Dimostrare risultati analoghi ai precedenti esercizi per funzioni concave.

Con lo stesso identico ragionamento dei precedenti esercizi si può dimostrare che:

$$f \text{ concava} \iff R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) \leq 0 \,\forall\, x_0, x_1, x_2 \iff x \mapsto R_f(x, x_0) \text{ decrescente.}$$

$$f \text{ strett. concava} \iff R_f^{(2)}(x_2, x_1, x_0) < 0 \,\forall\, x_0, x_1, x_2 \iff x \mapsto R_f(x, x_0) \text{ strett. decrescente.}$$

Se poi f è derivabile,

$$f \text{ concava} \iff f' \text{ decrescente} \iff f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \,\forall\, x, x_0.$$

$$f \text{ strett. concava} \iff f' \text{ strett. decrescente} \iff f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \,\forall\, x, x_0.$$

Infine, se f è derivabile due volte, $f'' \leq 0$ se e solo se f è concava e inoltre se $f' < 0$ allora f è strettamente concava.

8. Sia f una funzione concava e convessa su un intervallo I. Mostrare che f è lineare, cioè $f(x) = ax + b$ per opportune costanti a, b.

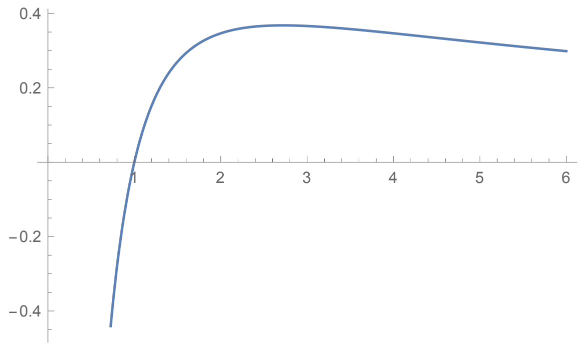
   Se f è convessa e concava, allora per ogni t, x_1, x_2 vale
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$
   cioè, per ogni x
$$f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}.$$
   Dunque f è lineare con $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ e $b = \dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$.

9. Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x \le 1 \\ a & x = 0 \end{cases}$. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è continua e per quali è convessa. Dire perché questo non contraddice i risultati visti a lezione.

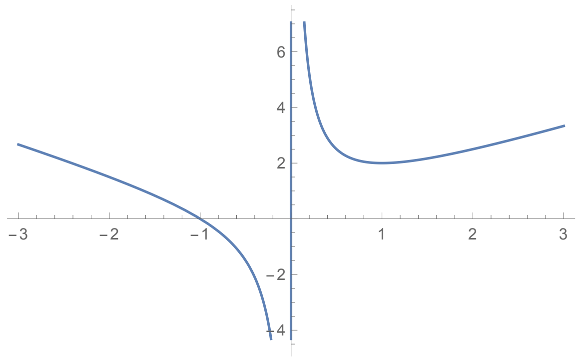
   Ovviamente la funzione è continua se e solo se $a = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
   Affinché f sia convessa è sufficiente verificare la definizione con $x_2 = 0$ e x_1 qualsiasi, perché su $(0, 1]$ già sappiamo che lo è: vogliamo avere per ogni t, x
$$t^2x^2 = f(tx) \le tf(x) + (1-t)f(0) = tx^2 + (1-t)a.$$
   Poiché $t^2x^2 \le tx^2$, la disuguaglianza è sempre vera se $a \ge 0$ e dunque per questi valori la funzione è convessa. Se invece $a < 0$, la funzione non è convessa perché se $tx^2 < -a$ allora
$$tx^2 + (1-t)a > tx^2 - t(1-t)x^2 = t^2x^2.$$
   Questo non contraddice i risultati visti a lezione perché le funzioni convesse sono sempre continue solo all'interno del loro dominio.

10. Studiare graficamente le seguenti funzioni, determinandone: insieme di definizione; segno, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di discontinuità, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, concavità e convessità, eventuali punti di flesso.

    (a) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$;
    Il dominio sarà dato dalle x per cui il logaritmo è ben definito e che non annullano il denominatore; poiché il logaritmo ha senso quando $x > 0$, valori per cui il denominatore non si annulla, dunque il dominio è $\mathbb{R}_+$. Poiché su questo insieme il denominatore è positivo, allora $f(x) > 0 \iff \log x > 0 \iff x > 1$ e analogamente l'unico zero è $x = 1$.
    Agli estremi del dominio abbiamo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, dunque gli asintoti sono $x = 0$ e $y = 0$.
    La funzione è continua e derivabile in tutto il suo insieme di definizione con $f'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$, che è positiva per $0 < x < e$ e negativa per $x > e$, dunque f sarà monotona crescente su $(0, e)$ e decrescente su $(e, +\infty)$. L'unico punto critico è $x = e$ con $f(e) = \dfrac{1}{e}$, e visto il comportamento agli estremi del dominio sarà un punto di massimo assoluto.
    La funzione è anche derivabile due volte con $f''(x) = \dfrac{-3 + 2\log x}{x^3}$, che è negativa per $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ e positiva per $x > e^{\frac{3}{2}}$, dunque f è concava in $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ e convessa in $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ mentre $x = e^{\frac{3}{2}}$ è un punto di flesso, a tangente obliqua poiché $f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2e^3} \neq 0$.

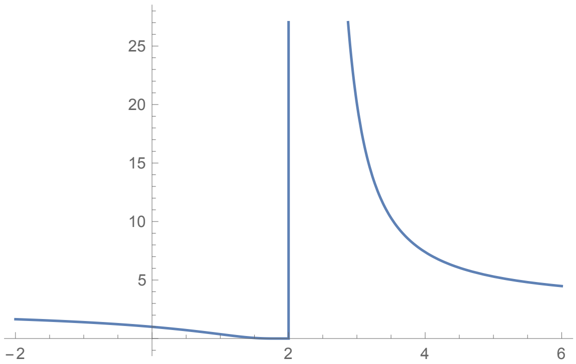


(b) $f(x) = |x| + \frac{1}{x}$;
La funzione è ben definita fintanto che il denominatore non si annulla, cioè per $x \neq 0$.
Scrivendo la funzione come $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x > 0 \\ -x + \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ deduciamo che è sicuramente positiva per $x > 0$, mentre per $x < 0$ abbiamo $f(x) > 0 \iff -x + \frac{1}{x} > 0 \iff -x^2 + 1 < 0 \iff x < -1$ e $x = -1$ è l'unico zero.
Agli estremi del dominio abbiamo $\lim_{x \to \pm+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$, dunque $x = 0$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty}(f(x) + x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, f ha anche gli asintoti obliqui $y = x$ a $+\infty$ e $y = -x$ a $-\infty$.
f è continua e derivabile su tutto l'insieme di definizione con $f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ -1 - \frac{1}{x^2} & x < 0 \end{cases}$.
Dunque, $f' > 0$ su $(1, +\infty)$ e $f' < 0$ su $(0, 1)$ e $(-\infty, 0)$, ovvero f è monotona crescente sul primo intervallo e decrescente sugli altri due. L'unico punto critico è $x = 1$, che è di minimo relativo ma non assoluto, giacché $\inf f = -\infty$.
La funzione è derivabile due volte con $f(x) = \frac{2}{x^3}$, dunque è convessa per $x > 0$, concava per $x < 0$ e non ha flessi.

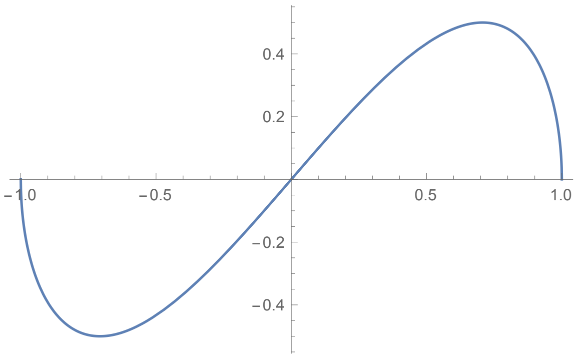


(c) $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$;
$f(x)$ è ben definita fintanto che il denominatore non si annulla, cioè per $x \neq 2$; inoltre, essendo un esponenziale, è sempre positiva.
Agli estremi del dominio abbiamo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, quindi $y = e$ è un asintoto orizzontale e $x = 2$ è un asintoto verticale.
f è continua su tutto il suo insieme di definizione, con derivata $f'(x) = -\frac{2e^{\frac{x}{x-2}}}{(x-2)^2}$, pertanto è sempre decrescente e non ha punti stazionari. Del resto, dallo studio degli

asintoti abbiamo già visto che $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$.
La derivata seconda di f è $f''(x) = \dfrac{4(x-1)e^{\frac{x}{x-2}}}{(x-2)^4}$, dunque la funzione è convessa su $(1,2)$ e $(2,\infty)$ e concava su $(-\infty,1)$. L'unico punto di flesso è $x=1$, ed è a tangente obliqua perché f' non si annulla mai.

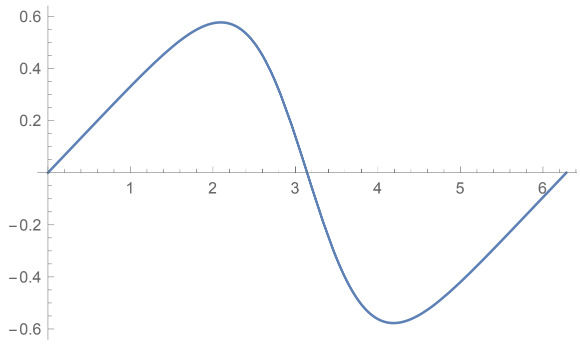


(d) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$;
f è ben definita quando l'argomento della radice è maggiore o uguale a zero, cioè per $-1 \leq x \leq 1$. Inoltre, poiché la radice non è mai negativa, sarà positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, mentre gli zeri sono $x = 0, -1, 1$.
Agli estremi del dominio abbiamo $\lim_{x\to\pm1} f(x) = 0$, dunque non ci sono asintoti.
La funzione è continua su tutto il suo dominio, mentre la sua derivata vale $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Poiché $\lim_{x\to\pm1} f'(x) = \mp\infty$, sono due punti di non derivabilità di tipo cuspide. La funzione è monotona crescente tra $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e decrescente in $\left(-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, mentre i $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sono i due punti critici; poiché $f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\dfrac{1}{2}$, concludiamo che sono rispettivamente un massimo e un minimo assoluti.
La derivata seconda è $f''(x) = \dfrac{x\left(2x^2-3\right)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, dunque la funzione è convessa su $[-1,0)$, concava su $(0,1]$ e $x=0$ è un flesso a tangente obliqua.



(e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$;
Poiché il denominatore non si annulla mai, la funzione sarà definita per ogni x reale. Essendo poi periodica di periodo 2π, non sarà restrittivo studiarla solamente tra $[0,2\pi]$. Su quest'ultimo intervallo la funzione avrà lo stesso segno di $\sin x$, cioè positiva su $(0,\pi)$, negativa su $(\pi,2\pi)$ e si annullerà in $x = 0, \pi$.

Agli estremi del dominio non abbiamo limiti, e dunque neanche asintoti, né a $+\infty$ né a $-\infty$, perché ad esempio $f(\pi n) = 0$ e $f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio con $f'(x) = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$, dunque f cresce tra 0 e $\frac{2}{3}\pi$ e tra $\frac{4}{3}\pi$ e 2π, mentre decresce tra $\frac{2}{3}\pi$ e $\frac{4}{3}\pi$. I due punti stazionari $x = \frac{2}{3}\pi$ e $\frac{4}{3}\pi$ sono rispettivamente un massimo e un minimo, e saranno necessariamente massimo e minimo assoluti con $\max f = f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\min f = f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
La derivata seconda è $f''(x) = \frac{2\sin x(\cos(x) - 1)}{(2 + \cos x)^3}$, dunque f è concava su $(0, \pi)$, convessa su $(\pi, 2\pi)$ mentre 0 e π sono i due flessi a tangente obliqua.



(f) $f(x) = \arctan(e^x + 1)$;
La funzione è definita su tutta la retta reale; inoltre, poiché l'arcotangente ha lo stesso segno dell'argomento, è sempre strettamente positiva.
Agli estremi del dominio abbiamo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, dunque $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{4}$ saranno due asintoti orizzontali.
La funzione è continua e derivabile con $f'(x) = \frac{e^x}{1 + (e^x + 1)^2}$. Dunque f è strettamente crescenti, non ha punti critici e quindi $\inf f = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{6}$ e $\sup f \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
La derivata seconda è $f''(x) = \frac{2e^x - e^{3x}}{(1 + (e^x + 1)^2)^2}$, dunque f è convessa per $x < \frac{\log 2}{2}\sqrt{3}$, concava per $x > \frac{\log 2}{2}$ mentre $x = \frac{\log 2}{2}$ è flesso a tangente obliqua.