Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 9 – 10 del 16 – 18 Aprile 2018
Argomento: Derivate seconde, studio di funzione

1. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile. Dimostrare che le seguenti affermazioni si equivalgono:
   (a) f è convessa;
   (b) f' è crescente su I;
   (c) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in I$.

   Dedurne che, se f è differenziabile due volte, allora è convessa se e solo se $f'' \geq 0$ su I.

2. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *strettamente* convessa se vale la disuguaglianza stretta
   $$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \qquad \forall\, t \in (0,1),\ \forall\, x_1, x_2 \in I.$$
   Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   (a) f è strettamente convessa;
   (b) $R^{(2)}_f(x_2, x_1, x_0) > 0$ per ogni $x_1 < x_0 < x_2$;
   (c) $x \mapsto R_f(x, x_0)$ è strettamente crescente in $I \setminus \{x_0\}$;
   (d) $R_f(x_1, x_0) < R_f(x_2, x_0)$ per ogni $x_1 < x_0 < x_2$.

3. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile. Dimostrare che le seguenti affermazioni si equivalgono:
   (a) f è strettamente convessa;
   (b) f' è strettamente crescente su I;
   (c) $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x, x_0 \in I$.

   Dedurne che, se f è differenziabile due volte e $f' > 0$ su I, allora è strettamente convessa.

4. Dimostrare che $f(x) = x^4$ è strettamente convessa e calcolarne f''. Spiegare perché ciò non contraddice i precedenti risultati.

5. Sia f una funzione strettamente convessa. Dimostrare che f ha al più due zeri.
   Mostrare esempi di funzioni strettamente convesse aventi rispettivamente due zeri, uno zero, nessuno zero.

6. Sia f una funzione strettamente convessa su I. Dimostrare che f non può avere punti di massimo relativo interni ad I.
   Dimostrare che se f ha un punto di minimo relativo allora di tratta di un minimo globale stretto.
   Dedurne che ogni funzione strettamente convessa o non ha minimo oppure ha un unico minimo globale stretto. Fornire un esempio per ciascun caso.

7. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *concava* se $-f$ è convessa. f si dice *strettamente* concava se $-f$ è strettamente convessa.
Dimostrare risultati analoghi ai precedenti esercizi per funzioni concave.

8. Sia f una funzione concava e convessa su un intervallo I. Mostrare che f è lineare, cioè $f(x) = ax + b$ per opportune costanti a, b.

9. Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x \leq 1 \\ a & x = 0 \end{cases}$. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è continua e per quali è convessa. Dire perché questo non contraddice i risultati visti a lezione.

10. Studiare graficamente le seguenti funzioni, determinandone: insieme di definizione; segno, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di discontinuità, di non derivabilità, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, concavità e convessità, eventuali punti di flesso.

    (a) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$;

    (b) $f(x) = |x| + \dfrac{1}{x}$;

    (c) $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$;

    (d) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$;

    (e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$;

    (f) $f(x) = \arctan(e^x + 1)$.