Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 7 – 8 del 26 – 28 Marzo 2018
Argomento: Primitive

1. Trovare delle formule ricorsive per il calcolo di

$$D^{-1}(x^n e^x); \qquad D^{-1}(x^n \sin x); \qquad D^{-1}(x^n \cos x); \quad n \in \mathbb{N}.$$

Possiamo trovare $D^{-1}(x^n e^x)$ per parti, scrivendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^n$:

$$D^{-1}(x^n e^x) = f(x)g(x) - D^{-1}(f(x)g'(x)) = x^n e^x - nD^{-1}(x^{n-1}e^x).$$

Chiamando dunque E_n l'insieme delle primitive di $x^n e^x$ abbiamo $E_n = x^n e^x - nE_{n-1}$.

Possiamo ragionare analogamente per seno e coseno, indicando $S_n := D^{-1}(x^n \sin x)$ e $C_n := D^{-1}(x^n \cos x)$. Nel caso dei seni, scriviamo $f(x) = -\cos x$ e $g(x) = x^n$:

$$D^{-1}(x^n \sin x) = f(x)g(x) - D^{-1}(f(x)g'(x)) = -x^n \cos x + nD^{-1}(x^{n-1} \cos x).$$

Analogamente, per i coseni, abbiamo $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^n$ e dunque:

$$D^{-1}(x^n \cos x) = f(x)g(x) - D^{-1}(f(x)g'(x)) = x^n \sin x - nD^{-1}(x^{n-1} \sin x).$$

Quindi, $S_n = -x^n \cos x + nC_{n-1}$ e $C_n = x^n \sin x - nS_{n-1}$.

2. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

(a) $\dfrac{x}{x^2 - 6x + 9}$;
Poiché il denominatore si fattorizza come $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ e il numeratore è di grado inferiore, scrivendo $\dfrac{x}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{(x-3)^2}$ per opportune costanti A, B, le primitive saranno del tipo $\left\{A \log|x-3| - \dfrac{B}{x-3} + c;\, c \in \mathbb{R}\right\}$.
Poiché $\dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{(x-3)^2} = \dfrac{A(x-3)+B}{(x-3)^2} = \dfrac{Ax + B - 3A}{x^2 - 6x + 9}$, le costanti A, B risolveranno $\begin{cases} A = 1 \\ B - 3A = 0 \end{cases}$, cioè $(A, B) = (1, 3)$ e dunque otteniamo

$$\left\{\log|x-3| - \frac{3}{x-3} + c;\, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) $\dfrac{x^3}{x^2 + 2}$;
Poiché il numeratore ha grado maggiore del denominatore, è necessario scomporre:

$$\frac{x^3}{x^2+2} = \frac{x^3 + 2x}{x^2+2} - \frac{2x}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2}.$$

A questo punto possiamo calcolare la primitiva di ciascun addendo: per il primo è immediata, per il secondo basta notare che il numeratore è la derivata del denominatore, a meno di un fattore moltiplicativo, e dunque si ottiene

$$\left\{\frac{x^2}{2} - \log\left(x^2+2\right) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(c) $\dfrac{1}{x^4 - x^2}$;
Poiché il denominatore si fattorizza come $x^4 - x^2 = x^2\left(x^2-1\right) = x^2(x-1)(x+1)$, potremo scrivere $\dfrac{1}{x^4-x^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{D}{x+1}$ per opportune costanti A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
\frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} &= \frac{(Ax+B)(x-1)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{A\left(x^3-x\right) + B\left(x^2-1\right) + C\left(x^3+x^2\right) + D\left(x^3-x^2\right)}{x^4-x^2} \\
&= \frac{(A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 - Ax - B}{x^4-x^2}.
\end{aligned}$$

Dunque, le costanti soddisferanno il sistema $\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+C-D=0 \\ -A=0 \\ -B=1 \end{cases}$, e cioè $(A,B,C,D) = \left(0, -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. Quindi, le primitive di $\dfrac{1}{x^4-x^2} = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1}$ sono date da

$$\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(d) $\dfrac{\log x}{(x+1)^2}$;
Proviamo a trovare la primitiva per parti, scrivendo $\dfrac{\log x}{(x+1)^2} = f'(x)g(x)$, con $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ e $g(x) = \log x$; dunque avremo $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ e quindi

$$D^{-1}\left(\frac{\log x}{(x+1)^2}\right) = -\frac{\log x}{x+1} + D^{-1}\left(\frac{1}{x(x+1)}\right).$$

Per trovare quest'ultima primitiva sarà necessario scomporre il denominatore, cioè scrivere

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)},$$

dunque abbiamo $A = 1$ e $B = -1$ e pertanto

$$D^{-1}\left(\frac{1}{x(x+1)}\right) = D^{-1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \{\log(x) - \log(x+1) + c;\ c \in \mathbb{R}\}.$$

Dunque la primitiva cercata è

$$D^{-1}\left(\frac{\log x}{(x+1)^2}\right) = \left\{-\frac{\log x}{x+1} + \log(x) - \log(x+1) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(e) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$;
Ragioniamo come nel caso precedente, scrivendo $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $g(x) = \arctan x$, cioè

$f(x) = -\dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ e dunque

$$D^{-1}(f'(x)g(x)) = -\frac{\arctan x}{x} + D^{-1}\left(\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\right).$$

Per trovare l'ultima primitiva, scriviamo

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)},$$

da cui $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$, e quindi

$$D^{-1}\left(\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\right) = D^{-1}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) = \left\{\log|x| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\},$$

ovvero

$$D^{-1}\left(\frac{\arctan x}{x^2}\right) = \left\{-\frac{\arctan x}{x} + \log|x| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(f) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3e^{-2x}-2}$;
Possiamo scrivere la funzione come

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3e^{-2x}-2} = \frac{e^{2x}-1}{(e^{2x})^2-2e^{2x}+3}e^{2x} = g(f(x))f'(x),$$

con $g(y) = \dfrac{1}{2}\dfrac{y-1}{y^2-2y+3}$ e $f(x) = e^{2x}$ e dunque la primitiva si può calcolare per sostituzione conoscendo la primitiva di g. Quest'ultima si trova facilmente notando che, a meno di moltiplicare per $\dfrac{1}{2}$, il numeratore è la derivata del denominatore, dunque sarà $G(y) = \dfrac{1}{4}\log\left|y^2-2y+3\right|$; pertanto avremo

$$D^{-1}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3e^{-2x}-2}\right) = \{G(f(x))+c;\ c \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{1}{4}\log\left|e^{4x}-2e^{2x}+3\right| + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(g) $\dfrac{\sin(x)\cos(x)}{3+2\sin(x)-2\cos^2(x)}$;
Scrivendo la funzione come

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{3+2\sin(x)-2\cos^2(x)} = \frac{\sin x}{1+2\sin(x)+2\sin^2 x}\cos x = g(f(x))f'(x),$$

con $g(y) = \dfrac{y}{1+2y+2y^2}$ e $f(x) = \sin x$ e dunque cercare la primitiva per parti.
Per trovare la primitiva di g, sarà sufficiente scrivere

$$g(y) = \frac{y+\frac{1}{2}}{2y^2+2y+1} - \frac{1}{4y^2+4y+2} = \frac{1}{4}\frac{4y+2}{2y^2+2y+1} - \frac{1}{2}\frac{2}{(2y+1)^2+1}$$

e dunque avremo $G(y) = \dfrac{1}{4}\log\left(2y^2+2y+1\right) - \dfrac{1}{2}\arctan(2y+1)$; quindi,

$$D^{-1}\left(\frac{\sin(x)\cos(x)}{3+2\sin(x)-2\cos^2(x)}\right) = \left\{\frac{1}{4}\log\left(2\sin^2(x)+2\sin(x)+1\right) - \frac{1}{2}\arctan(2\sin(x)+1) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(h) $\dfrac{x^4+x-1}{x^4+2x^2+1}$;
Innanzi tutto, scrivendo $x^4+x-1 = x^4+2x^2+1-\left(2x^2-x+2\right)$, abbiamo

$$\frac{x^4+x-1}{x^4+2x^2+1} = 1-\frac{2x^2-x+2}{x^4+2x^2+1} = 1-\frac{x+2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = 1-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{2}{x^2+1}.$$

Possiamo trovare la primitiva di clascuno di questi addendi; per il secondo, notiamo che $x = D\left(x^2+1\right)$ e dunque $D^{-1}\left(\dfrac{2x}{(x^2+1)}\right) = \dfrac{1}{x^2+1}$; pertanto la primitiva cercata è

$$\left\{x-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}-2\arctan x+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.$$

(i) $\dfrac{1}{2\sin(x)-\sin^3(x)}$;
Analogamente al caso precedente, scriviamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sin(x)-\sin^3(x)} &= \frac{\sin x}{2\sin^2(x)-\sin^4(x)} \\
&= \frac{\sin x}{2\left(1-\cos^2(x)\right)-\left(1-\cos^2(x)\right)^4} \\
&= \frac{-\sin x}{\cos^4(x)-1}
\end{aligned}$$

e dunque abbiamo $g(y) = \dfrac{1}{y^4-1}$ e $f(x) = \cos x$.
Per trovare la primitiva di g fattorizziamo il denominatore come $y^4-1 = \left(y^2+1\right)(y-1)(y+1)$ e scriviamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^4-1} &= \frac{Ay+B}{y^2+1}+\frac{C}{y-1}+\frac{D}{y+1} \\
&= \frac{(Ay+B)(y-1)(y+1)+C\left(y^2+1\right)(y+1)+D\left(y^2+1\right)(y-1)}{\left(y^2+1\right)(y-1)(y+1)} \\
&= \frac{(A+C+D)y^3+(B+C-D)y^2+(-A+C+D)y-B+C-D}{y^4-1},
\end{aligned}$$

dunque $\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+C-D=0 \\ -A+C+D=0 \\ -B+C-D=1 \end{cases}$, cioè $(A,B,C,D) = \left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$. La primitiva di $g(y) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{y+1}$ sarà dunque $G(y) = -\dfrac{1}{2}\arctan(y)+\dfrac{1}{4}\log|y-1|-\dfrac{1}{4}\log|y+1|$, quindi

$$D^{-1}\left(\frac{1}{2\sin(x)-\sin^3(x)}\right) = \left\{-\frac{1}{2}\arctan(\sin(x))+\frac{1}{4}\log(1-\sin x)-\frac{1}{4}\log(1+\sin x)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}$$

3. Calcolare le seguenti primitive con la sostituzione $t = \tan\dfrac{x}{2}$:

$$D^{-1}\left(\frac{1}{2+\sin x}\right); \qquad D^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1+\sin x}}\right).$$

Applichiamo la formula delle primitive per sostituzione nella forma

$$D^{-1}(g(x))|_{x=x(t)} = \left\{D^{-1}(g(x(t))x'(t))+c;\ c\in\mathbb{R}\right\},$$

con $x(t) = 2\arctan t$ ottenuta invertendo $t = \tan\dfrac{x(t)}{2}$; derivando otteniamo $x'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ e inoltre $\sin(x(t)) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos(x(t)) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; dunque

$$D^{-1}\left(\frac{1}{2+\sin x}\right) = D^{-1}\left(\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\right)\Bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}} = D^{-1}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)\Bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

Poiché $\dfrac{1}{t^2+t+1} = \dfrac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$, la sua primitiva sarà $\left\{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}$, e dunque

$$D^{-1}\left(\frac{1}{2+\sin x}\right) = \left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Nell'altro caso otteniamo

$$D^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1+\sin x}}\right) = D^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}}\frac{2}{1+t^2}\right)\Bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}} = D^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{(1+t)\,(1+t^2)}\right)\Bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

Fattorizziamo ora l'ultima espressione come

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+t)^2\,(1+t^2)} &= \frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}\\ &= \frac{A\left(1+t^2\right)+(Bt+C)(1+t)}{(1+t)\,(1+t^2)}\\ &= \frac{(A+B)t^2+(B+C)+A+C}{(1+t)^2\,(1+t^2)},\end{aligned}$$

che vale per $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, dunque

$$\begin{aligned}&D^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1+\sin x}}\right)\\ =\ & D^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{(1+t)\,(1+t^2)}\right)\Bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}\\ =\ & D^{-1}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)\right)\Bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}\\ =\ & \left\{\sqrt{2}\left(\log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{2}\log\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

4. Calcolare le seguenti primitive con la sostituzione $t=\tan x$:

$$D^{-1}\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}\right); \qquad D^{-1}\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right).$$

Ragioniamo come nell'esercizio precedente, ma stavolta $x(t)=\arctan t$, dunque $x'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ e inoltre $\sin(x(t)) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ e $\cos(x(t)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Quindi avremo

$$D^{-1}\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}\right) = D^{-1}\left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\right)\Bigg|_{t=\tan x} = D^{-1}\left(\frac{1}{1+2t^2}\right)\Bigg|_{t=\tan x}.$$

Poiché la primitiva dell'ultima funzione è $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t\right)$, allora

$$D^{-1}\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Poi, analogamente,

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right)=D^{-1}\left(\frac{1}{t^2}\frac{1}{1+t^2}\right)\Big|_{t=\tan x}.$$

Scomponendo l'ultima funzione abbiamo

$$\frac{1}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{1+t^2}=\frac{(A+B)t^2+A}{t^2\left(1+t^2\right)},$$

dunque $A=1$ e $B=-1$, ovvero

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right)=D^{-1}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\Big|_{t=\tan x}=\left\{-\frac{1}{\tan x}-\arctan(\tan x)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.$$

5. Calcolare le seguenti primitive tramite opportune sostituzioni:

$$D^{-1}\left(\frac{1}{2+\sqrt{x}}\right);\qquad\qquad D^{-1}\left(\sqrt{3+\sqrt{x}}\right).$$

Nel primo caso utilizziamo la sostituzione $t=\sqrt{x}$, cioé $x(t)=t^2$, dunque $x'(t)=2t$; pertanto,

$$\begin{aligned}D^{-1}\left(\frac{1}{2+\sqrt{x}}\right) &= \left\{D^{-1}\left(\frac{1}{2+t}2t\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}\Big|_{t=\sqrt{x}}\\ &= \left\{D^{-1}\left(2-4\frac{1}{2+t}\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}\Big|_{t=\sqrt{x}}\\ &= \left\{2\sqrt{x}-4\log\left(2+\sqrt{x}\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Nell'altro caso, utilizziamo $t=\sqrt{3+\sqrt{x}}$, cioé $x(t)=\left(t^2-3\right)^2=t^4-6t^2+9$ e dunque $x'(t)=4t^3-12t$, quindi avremo

$$\begin{aligned}D^{-1}\left(\sqrt{3+\sqrt{x}}\right) &= \left\{D^{-1}\left(t\left(4t^3-12t\right)\right)+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}_{t=\sqrt{3+\sqrt{x}}}\\ &= \left\{\frac{4}{5}t^5-4t^3+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}_{t=\sqrt{3+\sqrt{x}}}\\ &= \left\{\frac{4}{5}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)^{\frac{3}{2}}+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

6. Calcolare le seguenti primitive con la sostituzione $x=\sinh t$:

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right);\qquad\qquad D^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right).$$

Utilizziamo nuovamente la formula

$$D^{-1}(g(x))|_{x=x(t)}=\left\{D^{-1}(g(x(t))x'(t))+c;\ c\in\mathbb{R}\right\},$$

con $x(t)=\sinh t$: stavolta $x'(t)=\sqrt{x(t)^2+1}=\cosh t$, dunque

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\left\{D^{-1}(1)+c;,c\in\mathbb{R}\right\}\Big|_{t=\sinh^{-1}x}=\left\{\sinh^{-1}x+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Determiniamo ora esplicitamente $t = \sinh^{-1} x$: dalla definizione $\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = x$, cioè $e^{2t} - 1 - 2xe^t = 0$, quindi $e^t = x \pm \sqrt{x^2+1}$, ma essendo gli esponenziali positivi dovremo prendere solo la radice con il segno positivo, dunque $t = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ e cioè

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \left\{\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Nel secondo caso procediamo in maniera simile:

$$\begin{aligned} D^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right) &= \left\{D^{-1}\left(\cosh^2 t\right) + c;\, , c \in \mathbb{R}\right\}\Big|_{t=\sinh^{-1} x} \\ &= \left\{D^{-1}\left(\frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4}\right) + c;\, , c \in \mathbb{R}\right\}\Bigg|_{t=\sinh^{-1} x} \\ &= \left\{\frac{e^{2t}}{8} - \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{t}{2} + c;\, , c \in \mathbb{R}\right\}\Bigg|_{t=\sinh^{-1} x} \end{aligned}$$

. Calcoliamo quest'ultima espressione ricordando che $\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, dunque:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2t}}{8} - \frac{e^{-2t}}{8} &= \frac{1}{8}\left(\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 - \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2+1}}{\left(2x^2+1\right)^2 - 4x^2\left(x^2+1\right)}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} - \left(2x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}; \end{aligned}$$

quindi otteniamo

$$D^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \left\{\frac{x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

7. Calcolare le seguenti primitive con la sostituzione $x = \cosh t$:

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right); \qquad\qquad D^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right).$$

Ragioniamo come nel caso precedente ma stavolta $x(t) = \cosh t$, che verifica $x'(t) = \sqrt{x(t)^2 - 1} = \sinh t$, quindi

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \left\{D^{-1}(1) + c;\, , c \in \mathbb{R}\right\}\Big|_{t=\cosh^{-1} x} = \left\{\cosh^{-1} x + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Calcoliamo esplicitamente $t = \cosh^{-1} x$ come prima: per definizione abbiamo $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = x$, cioè $e^{2t} + 1 - 2xe^t = 0$, quindi $e^t = x \pm \sqrt{x^2-1}$, e trattandosi di un esponenziale prenderemo il segno positivo: $t = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$; dunque,

$$D^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \left\{\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Nel secondo caso,

$$
\begin{aligned}
D^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right) &= \left.\left\{D^{-1}\left(\sinh^2 t\right)+c;, c\in\mathbb{R}\right\}\right|_{t=\cosh^{-1}x}\\
&= \left.\left\{D^{-1}\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}\right)+c;, c\in\mathbb{R}\right\}\right|_{t=\cosh^{-1}x}\\
&= \left.\left\{\frac{e^{2t}}{8}-\frac{e^{-2t}}{8}-\frac{t}{2}+c;, c\in\mathbb{R}\right\}\right|_{t=\cosh^{-1}x}
\end{aligned}
$$

. Quest'ultima espressione si calcola ricordando che $\cosh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ e dunque

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{2t}}{8}-\frac{e^{-2t}}{8} &= \frac{1}{8}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(2x^2+1+2x\sqrt{x^2-1}-\frac{2x^2+1-2x\sqrt{x^2-1}}{\left(2x^2+1\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1};
\end{aligned}
$$

quindi otteniamo

$$
D^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)=\left\{\frac{x\sqrt{x^2-1}+\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2}+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.
$$

8. Calcolare la primitiva $D^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ con la sostituzione $x=\sin t$.

   Il ragionamento è analogo ai due esercizi precedenti, con $x(t)=\sin t$ e $x'(t)=\sqrt{1-x(t)^2}=\cos t$, perché abbiamo $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ e dunque la radice è positiva. Dunque, ricordando la primitiva di $\cos^2 t$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
D^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right) &= \left.\left\{D^{-1}\left(\cos^2 t\right)+c;, c\in\mathbb{R}\right\}\right|_{t=\arcsin^{-1}x}\\
&= \left.\left\{\frac{\sin(t)\cos(t)+t}{2}+c;, c\in\mathbb{R}\right\}\right|_{t=\arcsin^{-1}x}
\end{aligned}
$$

; poiché abbiamo $\sin(t)=x$ e $\cos t=\sqrt{1-x^2}$ otteniamo

$$
D^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\left\{\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}.
$$

Si può arrivare allo stesso risultato procedendo per parti, scrivendo $\sqrt{1-x^2}=f'(x)g(x)$, con $f'(x)=1$ e $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, dunque $f(x)=x$ e $g'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ e quindi

$$
\begin{aligned}
D^{-1}(f'(x)g(x)) &= x\sqrt{1-x^2}-D^{-1}\left(-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= x\sqrt{1-x^2}-D^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)+D^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= x\sqrt{1-x^2}-D^{-1}(f'(x)g(x))+\{\arcsin x+c;\ c\in\mathbb{R}\},
\end{aligned}
$$

cioè

$$
D^{-1}(f'(x)g(x))=\left\{\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}+c;\ c\in\mathbb{R}\right\}
$$