Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 5 – 6 del 19 – 21 Marzo 2018
Argomento: Regola di de l'Hôpital, Primitive

1. Calcolare i seguenti limiti con la regola di de l'Hôpital:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\log(1-\cos x)}$;
Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ dunque possiamo applicare la regola di de l'Hôpital derivando termine a termine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\log(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}.$$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos(x)-\sin(x)-2}{x^3}$;
Essendo una forma del tipo $\frac{0}{0}$ possiamo applicare la regola di de l'Hôpital. Poste $f(x):=e^x+\cos(x)-\sin(x)-2$ e $g(x):=x^3$, otteniamo $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin(x)-\cos(x)}{3x^2}$. Applicando nuovamente la regola di de l'Hôpital, cioè derivando numeratore e denominatore, si ottiene $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)+\sin x}{6x}$, che può essere risolto riconducendosi a limiti ben noti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos(x)-\sin(x)-2}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)+\sin x}{6x}\\ &= \frac{1}{6}\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\\ &= \frac{1}{6}(1+0+1)\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log x}+\frac{1}{1-x}\right)$;
Scrivendo il limite come $\lim_{x\to 0}\frac{1-x+\log x}{(\log x)(1-x)}$ abbiamo una forma del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ che si può risolvere applicando due volte la regola di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x+\log x}{(\log x)(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{1-x}{x}-\log x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+1}{1-x-x\log x}==\lim_{x\to 0}\frac{-1}{-1-(\log x+1)}=\frac{1}{2}.$$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x-\arctan x}$;
Derivando numeratore e denominatore si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x-\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(x)+x\sin x}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\frac{x^2}{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right) \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

2. Siano $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ e $g(x) := e^{\sin x} f(x)$. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dedurne che, nel teorema di de l'Hôpital, è essenziale assumere che $g'(x) \neq 0$ per x vicino a $+\infty$.

Evidentemente la funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)} = e^{-\sin x}$ non ha limite per $x \to +\infty$, in quanto oscilla tra $\dfrac{1}{e}$ e e. Il limite delle derivate è invece

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos(x)e^{\sin x}(x+\sin(x)\cos(x)) + e^{\sin x}\left(1+\cos^2 x - \sin^2 x\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}\left(\cos x(x+\sin(x)\cos(x)) + 2\cos^2 x\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(x+\sin(x)\cos(x)+2\cos x)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Si può infatti notare che $g'(x) = e^{\sin x}\cos x(x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x))$ si annulla lungo la successione $x_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e dunque non è soddisfatta una condizione del teorema di de l'Hôpital.

3. Sia $x_0 \in (a,b)$, f derivabile in $(a,b)\setminus\{x_0\}$ e continua in x_0. Dimostrare che, se esiste $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) =: L \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = L$.
Mostrare, con un controesempio, che non è possibile eliminare l'ipotesi di continuità in x_0.

Le ipotesi permettono di calcolare il limite del rapporto incrementale $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ applicando la regola di de l'Hôpital:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} f'(x) = L.$$

4. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = x^\alpha \quad x \in \mathbb{R} \quad (\alpha \neq -1)$;
   Essendo $D(x^{\alpha+1}) = (\alpha+1)x^\alpha$, allora $D^{-1}((\alpha+1)x^\alpha) = \{x^{\alpha+1}+c;\, c \in \mathbb{R}\}$, dalla linearità delle primitive abbiamo

$$D^{-1}f(x) = \frac{1}{\alpha+1} D^{-1}\left(\frac{x^\alpha}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}\{x^{\alpha+1}+c;\, c\in\mathbb{R}\} = \left\{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c;\, c\in\mathbb{R}\right\}.$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad x \in (0, +\infty)$ oppure $x \in (-\infty, 0)$;
Per $x \in (0, +\infty)$ abbiamo $D(\log x) = \dfrac{1}{x}$ e $D^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \{\log x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$. Invece per $x \in (-\infty, 0)$ abbiamo $D(\log(-x)) = \dfrac{1}{x}$ e dunque $D^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \{\log(-x) + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

(c) $f(x) = a^x \quad x \in \mathbb{R} \quad \alpha > 0$;
Poiché $D(a^x) = (\log a)a^x$, allora

$$D^{-1}(a^x) = \frac{1}{\log a} D^{-1}((\log a)a^x) = \frac{1}{\log a}\{a^x + c;\ c \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{a^x}{\log a} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}$$

(d) $f(x) = \sinh x \quad x \in \mathbb{R}$;
Essendo $D(\cosh x) = \sinh x$, allora $D^{-1}(\sinh x) = \{\cosh x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

(e) $f(x) = \cosh x \quad x \in \mathbb{R}$;
Essendo $D(\sinh x) = \cosh x$, allora $D^{-1}(\cosh x) = \{\sinh x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

(f) $f(x) = \sin x \quad x \in \mathbb{R}$;
Essendo $D(\cos x) = -\sin x$, allora $D^{-1}(\sin x) = -D^{-1}(-\sin x) = \{-\cos x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

(g) $f(x) = \cos x \quad x \in \mathbb{R}$;
Essendo $D(\sin x) = \cos x$, allora $D^{-1}(\cos x) = \{\sin x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{N}$;
Essendo $D(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, allora $D^{-1}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \{\tan x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
Essendo $D(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, allora $D^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \{\arcsin x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$. Equivalentemente, $D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e dunque $D^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \{-\arccos x + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;
Essendo $D(\arctan x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, allora $D^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = \{\arctan + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

5. Sia f una funzione dispari con $D^{-1}f \neq \emptyset$. Dimostrare che ogni $F \in \mathcal{D}^{-1}f$ è pari.
Sia g una funzione pari con $D^{-1}g \neq \emptyset$. Dimostrare che esiste un'unica $G \in \mathcal{D}^{-1}g$ dispari.

Se $f(x) = -f(-x)$ è dispari e $F'(x) = f(x)$ per ogni x, allora derivando $F(x) - F(-x)$ si ottiene

$$D(F(x) - F(-x)) = D(F(x)) - D(F(-x)) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f'(-x) = 0,$$

dunque $F(x) - F(-x)$ è costante per ogni primitiva F di f. Inoltre, per la continuità di F in 0, avremo $\lim_{x \to 0}(F(x) - F(-x)) = F(0) - F(0) = 0$ e dunque tale costante è nulla, cioè $F(x) = F(-x)$ per ogni x.

Prendiamo ora $g(x) = g(-x)$ pari e una sua primitiva G, e deriviamo $G(x) + G(-x)$:

$$D(G(x) + G(-x)) = D(G(x)) + D(G(-x)) = G'(x) - G'(-x) = g(x) - g(-x) = 0,$$

dunque $G(x) + G(-x) = c_0$ per una qualche costante c_0; ogni altra primitiva $\widetilde{G}$ sarà del tipo $\widetilde{G} = G + c$ e quindi verificherà $\widetilde{G}(x) + \widetilde{G}(-x) = G(x) + c + G(-x) + c = c_0 + 2c$; prendendo $c = -\dfrac{c_0}{2}$ otterremo che $\widetilde{G}(x) = -\widetilde{G}(-x)$ e dunque avremo una primitiva dispari.

6. Siano $f(x) := |x|$ e $g(x) := x^+ = \max\{x, 0\}$. Calcolare le primitive $D^{-1}f$ e $D^{-1}g$.

Poiché $f(x) = x$ per $x \in (0, +\infty)$, allora in questo intervallo abbiamo $D^{-1}f(x) = D^{-1}(x) = \left\{\dfrac{x^2}{2} + c;\, c \in \mathbb{R}\right\}$; analogamente, essendo $f(x) = -x$ per $x \in (-\infty, 0)$, in questo intervallo $D^{-1}f(x) = D^{-1}(-x) = \left\{-\dfrac{x^2}{2} + c;\, c \in \mathbb{R}\right\}$. Se f ammette primitiva su tutto $\mathbb{R}$, le primitive saranno necessariamente del tipo $\{F(x) + c;\, c \in \mathbb{R}\}$, con F che coincide con una primitiva di f in ciascun intervallo $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ estesa con continuità in 0, cioè $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} & x < 0 \end{cases}$. Rimane da vedere che $F'(0) = f(0)$, ma questo è vero perché i limiti destro e sinistro valgono

$$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\pm h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \pm h = 0 = f(0).$$

Per calcolare $D^{-1}g$, si può ragionare allo stesso modo, notando che $g(x) = x$ per $x \in (0, +\infty)$ e $g(x) = 0$ per $x \in (-\infty, 0)$. Alternativamente, si può notare che $g(x) = \dfrac{x + f(x)}{2}$ e dunque

$$D^{-1}(g(x)) = \frac{1}{2}\left(D^{-1}x + D^{-1}f(x)\right) = \left\{\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + c & x \geq 0 \\ c & x < 0 \end{cases},\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

7. Trovare delle formule per le seguenti primitive:

$$D^{-1}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \quad f(x) \neq 0; \qquad D^{-1}\left(f(x)^\alpha f'(x)\right) \quad f(x) > 0 \quad \alpha > 0; \qquad D^{-1}\left(e^{\beta f(x)} f'(x)\right) \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Nel primo caso possiamo porre $g(y) = \dfrac{1}{y}$ e scrivere $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = g(f(x))f'(x)$; le primitive di g sono date da $G(y) = \log|y| + c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$, quindi

$$D^{-1}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = D^{-1}\left(g(f(x))f'(x)\right) = \{G(f(x)) + c;\, c \in \mathbb{R}\} = \{\log|f(x)| + c;\, c \in \mathbb{R}\}.$$

Nel secondo caso, ossiamo ragionare come sopra con $g(y) = y^a$ le cui primitive sono del tipo $G(y) = \dfrac{y^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$ e dunque

$$D^{-1}(f(x)^\alpha f'(x)) = D^{-1}\left(g(f(x))f'(x)\right) = \{G(f(x)) + c;\, c \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c;\, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Nell'ultimo caso caso, la primitiva di $g(y) = e^{\beta y} = \left(e^{\beta}\right)^y$ è data da $\dfrac{\left(e^{\beta}\right)^y}{\log\left(e^{\beta}\right)} = \dfrac{e^{\beta y}}{\beta}$; quindi,

$$D^{-1}\left(e^{\beta f(x)} f'(x)\right) = \{G(f(x)) + c;\ c \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{e^{\beta f(x)}}{\beta} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}$$

8. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = x \sin\left(x^2\right) \quad x \in \mathbb{R}$;

   Dalla linearità delle primitive abbiamo $D^{-1}(f(x)) = \dfrac{1}{2} D^{-1}\left(2x \sin\left(x^2\right)\right)$ e quest'ultima funzione è della forma $g(h(x))h'(x)$ con $g(y) = \sin y$ e $h(x) = x^2$; dunque, poiché le primitive di g sono $\{-\cos(y) + c;\ c \in \mathbb{R}\}$, allora

$$\begin{aligned} D^{-1}(f(x)) &= \frac{1}{2} D^{-1}(g(h(x))h'(x)) \\ &= \frac{1}{2}\ D^{-1}(\sin y)\Big|_{y=x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(-\cos y)|_{y=x^2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\cos\left(x^2\right) + c;\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{-\frac{\cos\left(x^2\right)}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

   (b) $f(x) = \cos^3 x \quad x \in \mathbb{R}$;

   Scrivendo $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x$, possiamo applicare la formula dell'esercizio precedente con $g(y) = 1 - y^2$ e $h(x) = \sin x$. Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} D^{-1}(f(x)) &= D^{-1}(g(h(x))h'(x)) \\ &= D^{-1}\left(1 - y^2\right)\Big|_{y=\sin x} \\ &= \left(D^{-1}(1) - D^{-1}\left(y^2\right)\right)\Big|_{y=\sin x} \\ &= \left\{\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=\sin x} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

   .

   (c) $f(x) = \sin^3 x \quad x \in \mathbb{R}$;

   Come sopra, nel secondo caso, abbiamo $\sin^3 x = \left(\cos^2(x) - 1\right)(-\sin x)$, dunque possiamo ragionare allo stesso modo con $g(y) = y^2 - 1$ e $h(x) = \cos x$:

$$D^{-1}(f(x)) = D^{-1}(g(h(x))h'(x)) = D^{-1}\left(y^2 - 1\right)\Big|_{y=\cos x} = \left\{\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

   (d) $f(x) = \tan x \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{N}$;

   Poiché $f(x) = -\dfrac{-\sin x}{\cos x}$, possiamo scrivere $f(x) = -g(h(x))h'(x)$ con $g(y) = -\dfrac{1}{y}$ e $h(x) = \cos x$, dunque

$$\begin{aligned} D^{-1}(f(x)) &= D^{-1}(g(h(x))h'(x)) \\ &= D^{-1}\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{y=\cos x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{-\log|y| + c; c\in\mathbb{R}\}|_{y=\cos x}\\
&= \{-\log|\cos x| + c;\ c\in\mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

(e) $f(x) = \cot x \quad x\in (k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbb{N}$;
Come prima, abbiamo $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = g(h(x))h'(x)$, con $g(y) = \dfrac{1}{y}$ e $h(x) = \sin x$, dunque

$$D^{-1}(f(x)) = D^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)\Big|_{y=\sin x} = \{\log|y| + c; c\in\mathbb{R}\}|_{y=\sin x} = \{\log|\sin x| + c;\ c\in\mathbb{R}\}.$$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1} \quad x\in\mathbb{R}$;
Scrivendo $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x}{e^{2x}+e^x}$, abbiamo $g(y) = \dfrac{1}{y^2+y}$ e $h(x) = e^x$. Inoltre, scrivendo $g(y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, le sue primitive sono $\{\log|x| - \log|x+1| + c;\ c\in\mathbb{R}\}$, dunque

$$
\begin{aligned}
D^{-1}(f(x)) &= D^{-1}\left(\frac{1}{y^2+y}\right)\Big|_{y=e^x}\\
&= \{\log|e^x| - \log|e^x+1| + c;\ c\in\mathbb{R}\}\\
&= \{x - \log(e^x+1) + c;\ c\in\mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+e^{-x}} \quad x\in\mathbb{R}$;
Ragionando come prima $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$, dunque $g(y) = \dfrac{1}{y^2+1}$ e $h(x) = e^x$, quindi

$$D^{-1}(f(x)) = D^{-1}\left(\frac{1}{y^2+1}\right)\Big|_{y=e^x} = \{\arctan(e^x) + c;\ c\in\mathbb{R}\}.$$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} \quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{N}$;
Poiché $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin^2(x)}$, dunque in questo caso $g(y) = \dfrac{1}{1-y^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y+1} - \dfrac{1}{y-1}\right)$ $h(x) = \sin x$ e perciò

$$
\begin{aligned}
D^{-1}f(x) &= \frac{1}{2}\, D^{-1}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right)\Big|_{y=\sin x}\\
&= \frac{1}{2}(\log|\sin(x)+1| - \log|\sin(x)-1|)\\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}.
\end{aligned}
$$

9. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = xe^x \quad x\in\mathbb{R}$;
Possiamo scrivere $f(x) = h'(x)g(x)$, con $g(x) = x$ e $h(x) = e^x$, dunque le sue primitive valgono

$$
\begin{aligned}
D^{-1}(f(x)) &= D^{-1}(h'(x)g(x)) = h(x)g(x) - D^{-1}(h(x)g'(x))\\
&= xe^x - D^{-1}(e^x)\\
&= xe^x - \{e^x + c;\ c\in\mathbb{R}\}\\
&= \{(x-1)e^x + c;\ c\in\mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

(b) $f(x) = x\cos x \quad x \in \mathbb{R}$;
Come nel caso precedente, scriviamo $f = h'g$, con $g(x) = x$ e $h(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} D^{-1}(f(x)) &= x\sin x - D^{-1}(\sin x) \\ &= x\sin x - \{\cos(x) + c;\ c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\sin(x) + \cos(x) + c;\ c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(c) $f(x) = e^x \cos x \quad x \in \mathbb{R}$;
Stavolta scegliamo $g(x) = e^x$ e $h(x) = \sin x$:

$$D^{-1}(f(x)) = h(x)g(x) - D^{-1}(h(x)g'(x)) = e^x \sin x - D^{-1}(e^x \sin x)$$

Calcoliamo l'ultima primitiva con lo stesso metodo, scegliendo ora $g(x) = e^x$ e $h(x) = -\cos x$ (facendo l'altra scelta si tornerebbe al punto di partenza):

$$D^{-1}(e^x \sin x) = h(x)g(x) - D^{-1}(h(x)g'(x)) = -e^x \cos x + D^{-1}(e^x \cos x);$$

dunque abbiamo ottenuto:

$$D^{-1}(e^x \cos x) = e^x \sin x - D^{-1}(e^x \sin x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) - D^{-1}(e^x \cos x),$$

e cioè

$$D^{-1}(e^x \cos x) = \frac{1}{2}\left(D^{-1}(e^x \cos x) + D^{-1}(e^x \cos x)\right) = \left\{\frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(d) $f(x) = \cos^2 x \quad x \in \mathbb{R}$;
Prendendo $g(x) = \cos x$ e $h(x) = \sin x$, si ottiene

$$\begin{aligned} D^{-1}(f(x)) &= \sin(x)\cos(x) - D^{-1}\left(-\sin^2 x\right) \\ &= \sin(x)\cos(x) + D^{-1}\left(1 - \cos^2 x\right) \\ &= \sin(x)\cos(x) + D^{-1}(1) - D^{-1}(f(x)), \end{aligned}$$

dunque

$$D^{-1}(f(x)) = \frac{\sin(x)\cos(x) + D^{-1}(1)}{2} = \left\{\frac{\sin(x)\cos(x) + x}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(e) $f(x) = \sin^2 x \quad x \in \mathbb{R}$;
Si può ragionare come prima oppure semplicemente scrivere

$$\begin{aligned} D^{-1}(f(x)) &= D^{-1}\left(1 - \cos^2 x\right) \\ &= D^{-1}(1) - D^{-1}\left(\cos^2 x\right) \\ &= \{x + c;\ c \in \mathbb{R}\} - \left\{\frac{\sin(x)\cos(x) + x}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

(f) $f(x) = \arctan x \quad x \in \mathbb{R}$;
Possiamo prendere $g(x) = f(x) = \arctan x$ e $h(x) = x$ e ottenere

$$D^{-1}(f(x)) = x\arctan x - D^{-1}\left(x\frac{1}{1 + x^2}\right).$$

Per calcolare l'ultima primitiva, notiamo che $x\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{D\left(1+x^2\right)}{1+x^2}$ e dunque $D^{-1}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = \left\{\dfrac{\log\left(1+x^2\right)}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}$, quindi

$$D^{-1}(f(x)) = \left\{x \arctan x - \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(g) $f(x) = \arcsin x \quad x \in (-1,1)$;
Analogamente al caso precedente, prendiamo $g(x) = \arctan x$ e $h(x) = x$ e otteniamo $D^{-1}(f(x)) = x \arcsin x - D^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Essendo poi $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{2}\left(D\left(1-x^2\right)\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, allora $D^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \left\{-\sqrt{1-x^2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}$, dunque

$$D^{-1}(f(x)) = \left\{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(h) $f(x) = x^\alpha \log(x) \quad x > 0 \quad \alpha \neq -1$;
Prendiamo $g(x) = \log x$ e $h(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$:

$$\begin{aligned}
D^{-1}(f(x)) &= \frac{(\log x)x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - D^{-1}\left(\frac{1}{x}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \\
&= \frac{(\log x)x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}D^{-1}(x^\alpha) \\
&= \frac{(\log x)x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \left\{\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\frac{x^{\alpha+1}((\alpha+1)\log(x) - 1)}{(\alpha+1)^2} + c;\ c \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$