Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 5 – 6 del 19 – 21 Marzo 2018
Argomento: Regola di de l'Hôpital, Primitive

1. Calcolare i seguenti limiti con la regola di de l'Hôpital:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log x}{\log(1-\cos x)}$;
   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos(x)-\sin(x)-2}{x^3}$;
   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$;
   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x-\arctan x}$.

2. Siano $f(x):=x+\sin(x)\cos(x)$ e $g(x):=e^{\sin x}f(x)$. Dimostrare che
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\neq\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
   Dedurne che, nel teorema di de l'Hôpital, è essenziale assumere che $g'(x)\neq 0$ per x vicino a $+\infty$.

3. Sia $x_0\in(a,b)$, f derivabile in $(a,b)\setminus\{x_0\}$ e continua in x_0. Dimostrare che, se esiste $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=:L\in\mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 con $f'(x_0)=L$.
   Mostrare, con un controesempio, che non è possibile eliminare l'ipotesi di continuità in x_0.

4. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x)=x^\alpha \quad x\in\mathbb{R}\quad(\alpha\neq-1)$;
   (b) $f(x)=\dfrac{1}{x}\quad x\in(0,+\infty)$ oppure $x\in(-\infty,0)$;
   (c) $f(x)=a^x\quad x\in\mathbb{R}\quad \alpha>0$;
   (d) $f(x)=\sinh x\quad x\in\mathbb{R}$;
   (e) $f(x)=\cosh x\quad x\in\mathbb{R}$;
   (f) $f(x)=\sin x\quad x\in\mathbb{R}$;
   (g) $f(x)=\cos x\quad x\in\mathbb{R}$;
   (h) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{N}$;
   (i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
   (j) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari con $D^{-1}f \neq \emptyset$. Dimostrare che ogni $F \in \mathcal{D}^{-1}f$ è pari.
Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari con $D^{-1}g \neq \emptyset$. Dimostrare che esiste un'unica $G \in \mathcal{D}^{-1}g$ dispari.

6. Siano $f(x) := |x|$ e $g(x) := x^+ = \max\{x, 0\}$. Calcolare le primitive $D^{-1}f$ e $D^{-1}g$.

7. Trovare delle formule per le seguenti primitive:

$$D^{-1}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \quad f(x) \neq 0; \qquad D^{-1}\left(f(x)^\alpha f'(x)\right) \quad f(x) > 0 \quad \alpha > 0; \qquad D^{-1}\left(e^{\beta f(x)} f'(x)\right) \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

8. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = x \sin\left(x^2\right) \quad x \in \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = \cos^3 x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = \sin^3 x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (d) $f(x) = \tan x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{N}$;
   (e) $f(x) = \cot x \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{N}$;
   (f) $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \quad x \in \mathbb{R}$;
   (g) $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \quad x \in \mathbb{R}$;
   (h) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

9. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = xe^x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = x \cos x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = e^x \cos x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (d) $f(x) = \cos^2 x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (e) $f(x) = \sin^2 x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (f) $f(x) = \arctan x \quad x \in \mathbb{R}$;
   (g) $f(x) = \arcsin x \quad x \in (-1, 1)$;
   (h) $f(x) = x^\alpha \log x \quad x > 0 \quad \alpha \neq -1$.