Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 3 del 2 Novembre 2017
Argomento: Misure, completezza

1. Utilizzando un'opportuna serie di funzioni, dimostrare l'uguaglianza

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Consideriamo la serie di funzioni definita da $f_n(x) = \sin(x)e^{-nx}$ per $n \geq 1$: è possibile scambiare serie e integrale su $(0, +\infty)$ applicando il teorema della convergenza dominata alla successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, in quanto una maggiorante integrabile è

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| = |\sin x| \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^k = |\sin x| \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - 1\right) = \frac{|\sin x|}{e^x - 1}.$$

Scrivendo esplicitamente la serie di funzioni otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin x \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - 1\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\mathrm{d}x.$$

Integrando la serie termine a termine abbiamo invece

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{-nx}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{(i-n)x}}{2i} - \frac{e^{(-i-n)x}}{2i}\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{e^{(i-n)x}}{2i(i-n)} - \frac{e^{(-i-n)x}}{2i(-i-n)}\right]_0^{+\infty} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\left((-i-n)e^{ix} - (i-n)e^{-ix}\right) e^{-nx}}{2i\left(1+n^2\right)}\right]_0^{+\infty} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(-\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} - n\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{-(\cos x + n \sin x)e^{-nx}}{1+n^2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2},
\end{aligned}$$

dunque si ottiene l'uguaglianza cercata.

2. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura. Dimostrare che:

   (a) Se μ è completa, allora per ogni f è misurabile rispetto a Σ e $g : X \to [-\infty, +\infty]$ tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$ anche g è misurabile.

   (b) Se μ non è completa, allora per ogni f misurabile rispetto a Σ, esiste g non-misurabile tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$.

(a) Sia μ completa, f misurabile e g che coincide con f all'infuori dell'insieme $N := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ che ha misura nulla. Per ogni aperto $A \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$g^{-1}(A) = \left(g^{-1}(A) \cap N\right) \cup \left(g^{-1}(A) \cap N^c\right) = \left(g^{-1}(A) \cap N\right) \cup \left(f^{-1}(A) \cap N^c\right) :$$

il primo insieme è contenuto in N, che è misurabile e ha misura nulla, dunque è a sua volta misurabile; il secondo insieme è intersezione di due misurabili, perché f è misurabile e N^c è il complementare di un misurabile, e dunque sarà anch'esso misurabile. $g^{-1}(A)$ è dunque misurabile in quanto unione di due misurabili.

(b) Supponiamo ora che μ non sia completa, cioè che esista $A \in \Sigma$ con $\mu(A) = 0$ e $N \subset A$ che non appartiene a Σ, e prendiamo f misurabile rispetto a μ. Consideriamo ora $g := f + \chi_N$: coinciderà con f all'infuori di N, e in particolare all'infuori di A che ha misura nulla; se g fosse misurabile, allora lo sarebbe anche $g - f = \chi_N$, ma questo è impossibile perché la sua preimmagine dell'aperto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ è $\chi_N^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = N$ che non è misurabile.

3. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una funzione $L^1(\mu)$. Dimostrare che:

   (a) L'insieme $A := \{x \in X : f(x) = \pm\infty\}$ ha misura nulla $\mu(A) = 0$.

   (b) L'insieme $B := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ di insiemi misurabili di misura finita $\mu(B_n) < +\infty$.

   (c) Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile $C_\varepsilon \in \Sigma$ con misura finita $\mu(C_\varepsilon) < +\infty$ e $\int_{X \setminus C_\varepsilon} |f| \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$.

(a) Supponiamo per assurdo che l'insieme $A^+ := \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ abbia misura positiva $\mu\left(A^+\right) = \delta_0 > 0$; allora

$$\int_X |f| \mathrm{d}\mu \geq \int_X f^+ \mathrm{d}\mu \geq \int_{A^+} f^+ \mathrm{d}\mu = \delta_0 \cdot +\infty = +\infty,$$

contraddicendo il fatto che $f \in L^1(\mu)$. Analogamente, si dimostra che anche $A^- := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$ ha misura nulla e dunque $\mu(A) = \mu\left(A^+\right) + \mu\left(A^-\right) = 0$.

(b) Possiamo scrivere $B = A \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ con $B_n = \{x \in X : \frac{1}{n} < |f(x)| < n\}$: si tratta di insiemi misurabili, in quanto preimmagini di insiemi aperti (chiuso nel caso di A) e inoltre hanno misura finita: questo è stato appena visto per A, ed è vero anche per ciascun B_n, perchè se qualche B_{n_0} avesse misura infinita, allora

$$\int_X |f| \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_{n_0}} |f| \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_{n_0}} \frac{1}{n_0} \mathrm{d}\mu = \frac{\mu\left(B_{n_0}\right)}{n_0} = +\infty.$$

(c) Consideriamo la successione di funzione $f_n = |f|\chi_{B_n}$, con B_n come sopra: la successione converge in modo monotono crescente a $|f|\chi_{B\setminus A}$, con $|f|$ nulla all'infuori di $B \setminus A$ e A di misura nulla, dunque

$$\int_{B_n} |f| \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\nearrow} \int_X |f|\chi_{B\setminus A} \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu - \int_{X\setminus B} f \mathrm{d}\mu - \int_A f \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$, basterà prendere $C_\varepsilon = B_{n_\varepsilon}$, con n_ε sufficientemente grande affinché $\displaystyle\int_{X\setminus B_{n_\varepsilon}} |f| \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \mathrm{d}\mu - \int_{B_n} |f| \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$.

4. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ una successione di insiemi misurabili e siano:

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m \qquad \liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

Dimostrare che:

(a) $x \in \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ se e solo se appartiene ad un numero infinito di A_n.

(b) $x \in \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ se e solo se appartiene definitivamente a A_n.

(c) $\limsup\limits_{n\to+\infty}(\chi_{A_n}(x)) = \chi_{\limsup_{n\to+\infty} A_n}(x)$ e $\liminf\limits_{n\to+\infty}(\chi_{A_n}(x)) = \chi_{\liminf_{n\to+\infty} A_n}(x)$ per ogni $x \in X$.

(d) Se $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$, chiamiamo quest'insieme $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. Mostrare che, se $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < +\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right).$$

Mostrare, con un controesempio, che la finitezza della misura dell'unione è essenziale.

(a) $x \in \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ se e solo se appartiene ad un qualche $B_n := \bigcap\limits_{m\geq n} A_m$, cioè se e solo se per qualche n appartiene a ogni A_n per $m \geq n$; questo vuol dire che esiste n_0 tale che $x \in A_m$ per $m \geq n_0$, cioè sta in A_m definitivamente.

(b) $x \in \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ se e solo se appartiene a tutti gli insiemi $C_n := \bigcup\limits_{m\geq n} A_m$, cioè se e solo se per ogni n appartiene a un qualche A_m per $m \geq n$; ciò equivale a dire che esiste una successione $m_n \geq n$ tale che $x \in A_{m_n}$, ovvero che x appartiene a infiniti A_n.

(c) Per il primo punto, $x \in \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ se e solo se $x \in A_n$ per ogni $n \geq n_0$, che equivale a dire $\chi_{A_n}(x) = 1$ per ogni $n \geq n_0$, in altre parole $\liminf\limits_{n\to+\infty} \chi_{A_n} = 1$. Dunque abbiamo dimostrato la prima uguaglianza.

Per mostrare la seconda disuguaglianza notiamo che $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \left(\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n^c\right)^c$, dunque dalle definizioni di limiti superiore e inferiore e di funzione caratteristica otteniamo

$$\begin{aligned}
\chi_{\limsup_{n\to+\infty} A_n} &= \chi_{\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n^c\right)^c} \\
&= 1 - \chi_{\liminf_{n\to+\infty} A_n^c} \\
&= 1 - \liminf_{n\to+\infty} \chi_{A_n^c} \\
&= 1 - \liminf_{n\to+\infty}(1 - \chi_{A_n}) \\
&= -\liminf_{n\to+\infty}(-\chi_{A_n}) \\
&= \limsup_{n\to+\infty}(\chi_{A_n})
\end{aligned}$$

(d) Se i limiti superiore e inferiore coincidono, allora la funzione $f_n(x) := \chi_{A_n}(x)$ verifica $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \chi_{\lim_{n\to+\infty} A_n}(x)$. Se inoltre $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < +\infty$, allora la funzione $g := \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ è una maggiorante integrabile per la successione f_n, dunque applicando il teorema di convergenza dominata si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right).$$

Prendendo infine $A_n = \chi_{[n,n+1)}$, allora $\lim_{n\to+\infty} A_n = \emptyset$, perché

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} [m, m+1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \emptyset = \emptyset \qquad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty) = \emptyset.$$

Dunque, indicando con μ la misura di Lebesgue, abbiamo $\mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$ ma $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.