Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 3 – 4 del 12 – 14 Marzo 2018
Argomento: Derivate, Massimi e minimi, Regola di de l'Hôpital

1. Trovare gli estremi superiore e inferiore della funzione f sull'insieme A, specificando se si tratta del massimo e/o del minimo:
   (a) $f(x) = x^3 - x$, $A = [0, 1]$;
   (b) $f(x) = 4|x| - x^2$, $A = [-3, 3]$;
   (c) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, $A = (0, 3]$;
   (d) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$, A è il dominio di f;

2. Trovare il numero di zeri della funzione f sul proprio insieme di definizione:
   (a) $f(x) = x^5 - 5x + 1$;
   (b) $f(x) = ax - \log(1 - |x|) \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Sia $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$ per $x \in [0, 1]$. Calcolarne la derivata f', dimostrare che f è costante e calcolarne il suo valore.
   È possibile dire lo stesso di $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$?

4. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:
   (a) $\log(1 + x) \leq x \quad \forall x > -1$;
   (b) $\log(1 + x) \geq x - \dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$;
   (c) $1 - \cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
   (d) $x^x \geq x \quad \forall x > 0$;
   (e) $x^\alpha + y^\alpha \leq (x + y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \quad \forall x, y \geq 0,\ \alpha \geq 1$;
   (f) $|\tan x| \geq |x| \quad \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
   (g) $x^a e^{-bx} \leq \left(\dfrac{a}{be}\right)^a \quad \forall x \geq 0,\ a, b > 0$;
   (h) $2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \leq (x + y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha \quad \forall x, y \geq 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1$.

5. Calcolare i seguenti limiti e spiegare perché non vale la regola di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \qquad\qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x + 1}.$$

6. Calcolare i seguenti limiti con la regola di de l'Hôpital:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$;

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^x - 1}{x}$;

(c) $\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$;

(d) $\lim_{x \to 0} \left(e^x + x^2 \right)^{\frac{1}{x}}$;

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 2x) - 2\log(1 + x)}{1 - \cos x}$;

(f) $\lim_{x \to 0} (\sin x)^{\arctan x}$;

(g) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$.