Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 3 del 2 Novembre 2017
Argomento: Misure, completezza

1. Utilizzando un'opportuna serie di funzioni, dimostrare l'uguaglianza
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

2. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura. Dimostrare che:
   (a) Se μ è completa, allora per ogni f è misurabile rispetto a Σ e $g : X \to [-\infty, +\infty]$ tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$ anche g è misurabile.
   (b) Se μ non è completa, allora per ogni f misurabile rispetto a Σ, esiste g non-misurabile tale che $f(x) = g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$.

3. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una funzione $L^1(\mu)$. Dimostrare che:
   (a) L'insieme $A := \{x \in X : f(x) = \pm\infty\}$ ha misura nulla $\mu(A) = 0$.
   (b) L'insieme $B := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ di insiemi misurabili di misura finita $\mu(B_n) < +\infty$.
   (c) Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile $C_\varepsilon \in \Sigma$ con misura finita $\mu(C_\varepsilon) < +\infty$ e $\int_{X\setminus C_\varepsilon} |f| \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$.

4. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ una successione di insiemi misurabili e siano:
$$\liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m \qquad \limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$
   Dimostrare che:
   (a) $x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n$ se e solo se appartiene definitivamente a A_n.
   (b) $x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n$ se e solo se appartiene ad un numero infinito di A_n.
   (c) $\liminf_{n\to+\infty}(\chi_{A_n}(x)) = \chi_{\liminf_{n\to+\infty} A_n}(x)$ e $\limsup_{n\to+\infty}(\chi_{A_n}(x)) = \chi_{\limsup_{n\to+\infty} A_n}(x)$ per ogni $x \in X$.
   (d) Se $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n$, chiamiamo quest'insieme $\lim_{n\to+\infty} A_n$. Mostrare che, se $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < +\infty$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right).$$
   Mostrare, con un controesempio, che la finitezza della misura dell'unione è essenziale.