Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 2 del 19 Ottobre 2017
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale

1. Sia Σ la σ-algebra su $\mathbb{R}$ definita da
$$\Sigma := \{A \subset \mathbb{R} : [0, +\infty) \subset A \text{ oppure } A \subset (-\infty, 0)\}$$
e sia μ la misura su Σ definita da $\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{se } A \cap [0, +\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty, 0) \end{cases}$.
Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Σ-misurabile se e solo se è costante su $[0, +\infty)$.
Dimostrare che, se $f|_{[0,+\infty)} \equiv c$, allora $\displaystyle\int_A f \mathrm{d}\mu = \begin{cases} c & \text{se } A \cap [0, +\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty, 0) \end{cases}$ per ogni $A \in \Sigma$.

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Calcolare
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x$;
   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\mathrm{d}x$;
   (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

3. Utilizzando la serie di funzioni definita da $f_n(x) = \dfrac{\log x}{x^{n+1}}$ per $n \geq 1$, dimostrare l'uguaglianza
$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili tale che $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente e $\displaystyle\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Dimostrare che, se f_{n_k} è una sottosuccessione tale che $\displaystyle\int_X |f_{n_k}|\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{2^k}$, allora soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata.
Dimostrare, utilizzando la successione $f_n = \dfrac{1}{n}\chi_{[n,n+1)}$, che l'intera successione potrebbe non soddisfare le ipotesi del teorema di convergenza dominata. Trovare un'estratta f_{n_k} che soddisfa le ipotesi.

5. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura con $\mu(X) < +\infty$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili, non-negative, tali che $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente e che soddisfino la proprietà
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, M_\varepsilon \text{ tale che } \int_{\{x\in X :\, f_n(x) > M_\varepsilon\}} f_n \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon.$$
Dimostrare, utilizzando la successione $f_n^M(x) = \min\{f_n(x), M\}$, che $\displaystyle\int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.