Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 1 del 12 Ottobre 2017
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale

1. Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} n^2x\cos(x)e^{-n^2x^2}\mathrm{d}x$.

   La successione $f_n(x) := n^2x\cos(x)e^{-n^2x^2}$ converge a 0 per ogni $x \geq 0$, ma non soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata. Tuttavia, con il cambio di variabile $y = nx$ otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} n^2x\cos(x)e^{-n^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} y\cos\left(\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} y\cos\left(\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\chi_{\left[0,\frac{n\pi}{2}\right]}\mathrm{d}y.$$

   La successione $g_n(y) := y\cos\left(\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\chi_{\left[0,\frac{n\pi}{2}\right]}$ converge a $g(y) = ye^{-y^2}$ per ogni $y \in [0,+\infty)$ e inoltre la convergenza è monotona crescente perché sia $\cos\left(\frac{y}{n}\right)$ che $1_{\left[0,\frac{n\pi}{2}\right]}$ sono crescenti in n, ad ogni y fissato. Dunque, si può applicare il teorema di convergenza monotona:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} n^2x\cos(x)e^{-nx}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} y\cos\left(\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\chi_{\left[0,\frac{n\pi}{2}\right]}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} y\cos\left(\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\chi_{\left[0,\frac{n\pi}{2}\right]}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} ye^{-y^2}\mathrm{d}y \\
&= \left[-ye^{-y^2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

   Notare che, passando a limite dentro il primo integrale, si sarebbe ottenuto un risultato errato.

2. Sia f continua e non negativa su $[0,+\infty)$ tale che $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$. Dimostrare che $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+nx}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\searrow} 0$.

   Scrivendo $\frac{f(x)}{1+nx} = f(x) - \frac{nxf(x)}{1+nx}$, dalla linearità dell'integrale abbiamo

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+nx}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\frac{nxf(x)}{1+nx}\mathrm{d}x,$$

   dunque ci basterà mostrare che

$$\int_0^{+\infty}\frac{nxf(x)}{1+nx}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

   Quest'ultimo limite si ottiene grazie al teorema di convergenza monotona, perché la successione $g_n(x) = \frac{nxf(x)}{1+nx}$ converge a $f(x)$ in maniera monotona crescente.

3. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\arctan(nk)}{e^k}$.

Se μ è la misura del conteggio su $\mathbb{N}$, allora possiamo riscrivere la serie come $\int_{\mathbb{N}} f_n(k)\mathrm{d}\mu(k)$, con $f_n(k)=\frac{\arctan(nk)}{e^k}$.

Poiché le f_n sono funzioni non negative e $f_n(k) \underset{n\to+\infty}{\nearrow} \frac{\pi}{2}\frac{1}{e^k} := f(k)$, allora possiamo applicare il teorema della convergenza monotona:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{N}} f_n(k)\mathrm{d}\mu(k)=\int_{\mathbb{N}} f(k)\mathrm{d}\mu(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\right)=\frac{\pi}{2(e-1)}.$$

4. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}$ e tali che $f_n(x)\le f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, per un'opportuna f con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x<+\infty$. Dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \ge \limsup_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Dimostrare, utilizzando la successione $f_n=\chi_{[n,+\infty)}$, che è necessario assumere l'esistenza della maggiorante f con integrale finito.

Applicando il lemma di Fatou alla successione $g_n := f - f_n$ si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-\limsup_{n\to+\infty} f_n(x))\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\liminf_{n\to+\infty}(f(x)-f_n(x))\mathrm{d}x\le\liminf_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-f_n(x))\mathrm{d}x.$$

Se inoltre f ha integrale finito si può usare la linearità dell'integrale e si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x &= \liminf_{n\to+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x-\limsup_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x;\end{aligned}$$

dunque, cancellando in entrambi i membri l'integrale di f, si ottiene quanto richiesto.

La successione $f_n=\chi_{[n,+\infty)}$ mostra che avere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x<+\infty$ è essenziale perché $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, dunque in particolare $\limsup_{n\to+\infty} f_n=0$, ma $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=+\infty$ per ogni n.

5. Sia μ una misura Boreliana su $\mathbb{R}$ e finita sui compatti e sia $f(x):=\mu((x-1,x+1))$. Dimostrare che f è inferiormente semi-continua, ovvero che per ogni successione convergente $x_n\underset{n\to+\infty}{\to}x$ si ha $f(x)\le\liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Dimostrare, utilizzando la misura di Dirac $\mu(A)=\begin{cases}1 & \text{se } 0\in A\\ 0 & \text{se } 0\notin A\end{cases}$, che la disuguaglianza precedente potrebbe essere stretta.

Data una successione $x_n\underset{n\to+\infty}{\to}x$, definiamo $g_n(x):=\chi_{(x_n-1,x_n+1)}$. Il suo limite puntuale, e in particolare il limite inferiore, è $g(x)=\chi_{(x-1,x+1)}$, dunque dal Lemma di Fatou otteniamo

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\chi_{(x-1,x+1)}\mathrm{d}\mu=\int_{\mathbb{R}}\liminf_{n\to+\infty} g_n\mathrm{d}\mu\le\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n\mathrm{d}\mu=\liminf_{n\to+\infty}\mu((x_n-1,x_n+1))=\liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Prendendo $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A \\ 0 & \text{se } 0 \notin A \end{cases}$ e $x_n = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\nearrow} 1$, si ottiene $f(x_n) = \mu\left(\left(-\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right)\right) =$ 1 ma $f(1) = \mu((0,2)) = 0$.

6. Sia Σ la famiglia di insiemi definita da

$$\Sigma := \{A \subset \mathbb{R} : [0,+\infty) \subset A \text{ oppure } A \subset (-\infty, 0)\}.$$

Dimostrare che Σ è una σ-algebra su $\mathbb{R}$ e che la funzione $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \cap [0,+\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty, 0) \end{cases}$ è una misura su Σ.
Dimostrare che μ non è una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}$.

Verifichiamo che Σ è una σ-algebra su $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \in \Sigma$ perché ovviamente $[0,+\infty) \subset \mathbb{R}$; inoltre, è chiusa rispetto al passaggio al complementare perché se $[0,+\infty) \subset A$ allora $A^c \subset (-\infty, 0)$; infine, presi $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \Sigma$, se $[0,+\infty) \subset A_{n_0}$ per almeno un n_0, allora $[0,+\infty) \subset A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, se invece $A_n \subset (-\infty,0)$ per ogni n allora $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset (-\infty, 0)$, in ogni caso $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \Sigma$.
Per verificare che μ è una misura su Σ notiamo che, presa una famiglia di insiemi a due a due disgiunti $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, allora saranno tutti contenuti in $(-\infty, 0)$ oppure solamente uno verificherà $[0,+\infty) \subset A_{n_0}$. Nel primo caso, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset (-\infty, 0)$ e dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = 0 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right);$$

nel secondo caso invece $[0,+\infty) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \mu(A_{n_0}) = 1 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

In entrambi casi, l'additività numerabile è verificata e dunque μ è una misura su Σ.
μ non è una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}$ perché, presi ad esempio i due boreliani disgiunti $A := [0,1)$ e $B := [1,2)$, allora $\mu(A) + \mu(B) = 2$ ma $\mu(A \cup B) = 1$.