Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 14 – 15 del 21 – 23 Maggio 2018
Argomento: Integrali impropri

1. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}\mathrm{d}x$;

L'integranda $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$ è limitata su tutto l'intervallo di integrazione, che è a sua volta limitato, tranne che in $x=0$, dunque la convergenza dell'integrale dipenderà solo dal comportamento di f intorno a 0.
Nell'origine, utilizzando il limite notevole $\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\to} 1$, otteniamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$, dunque f avrà lo stesso comportamento di $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ in 0. Poiché sappiamo che g è integrabile, concludiamo che anche f lo è.

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$;

$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ è limitata sull'intervallo di integrazione ad eccezione di $x=\pi$. In $x=0$ infatti, nonostante numeratore e denominatore tendono entrambi a zero, abbiamo $f(x)\underset{x\to 0}{\to} 1$ e dunque f è limitata intorno a 0.
In $x=\pi$ invece con uno sviluppo di Taylor al primo ordine otteniamo $\sin x=(x-\pi)+O(x-\pi)^2$ e quindi $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{\frac{1}{x-\pi}}=\pi$, pertanto f avrà lo stesso andamento di $\dfrac{1}{x-\pi}$ intorno a $x=\pi$; essendo quest'ultima non integrabile, non lo sarà neppure f.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^3-x|}}$;

Bisognerà verificare l'integrabilità intorno ai tre punti in cui l'integranda non è definita, cioè $x=0,\pm 1$, e anche all'infinito.
Nelle tre singolarità l'argomento della radice ha uno zero semplice, dunque in ciascuna di esse l'andamento sarà del tipo di $\dfrac{1}{x-x_0}$ intorno a $x_0=0,1,-1$, e pertanto in ognuno di questi punti l'integrale esiste.
L'andamento a $\pm\infty$ è invece lo stesso di $\dfrac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}$, che è integrabile all'infinito, dunque anche qui la funzione è integrabile e concludiamo che l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ esiste.

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)\log\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x$;

L'integranda f è limitata su tutto l'intervallo $[0,1]$ tranne che nei due estremi.
In $x=0$ la singolarità è la stessa di $\dfrac{1}{\sqrt{x\log\frac{1}{x}}}$. Quest'ultima è integrabile, perché $\dfrac{1}{\log\frac{1}{x}}$

è limitata e $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile, quindi l'integrale improprio esiste intorno a $x = 0$.

In $x = 0$ invece, poiché $\dfrac{\log \frac{1}{x}}{1-x} \underset{x\to 1}{\to} 1$, allora $\dfrac{f(x)}{1-x} \underset{x\to 1}{\to} 1$ e dunque l'andamento di f è lo stesso di $\dfrac{1}{1-x}$, cioè non integrabile.

2. Discutere, al variare del parametro reale a, la convergenza dei seguenti integrali impropri:

   (a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{|\log x|^a}{x^2-1}\mathrm{d}x;$

   L'unico punto in cui l'integranda non è definita è $x = 1$. Qui il numeratore ha lo stesso andamento di $|x-1|^a$, mentre il denominatore va come $x - 1$.
   Dunque la funzione sarà integrabile se e solo se lo è $|x-1|^{a-1}$, cioè per $a > 0$.

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^3-ax^2}\mathrm{d}x;$
   L'integranda non è definita in $x = 0$ e $x = a$, dunque verifichiamo il comportamento in questi punti oltre che all'infinito.
   In $x = 0$, essendo $1 - \cos x \sim x^2$, l'integranda avrà lo stesso comportamento di $\dfrac{1}{x-a}$, dunque è limitata e quindi integrabile per $a \neq 0$. In $x = a > 0$, se $a \neq 2k\pi$ per $k \in \mathbb{N}$ la funzione ha lo stesso andamento di $\dfrac{1}{x-a}$ e dunque non è integrabile, altrimenti è limitata e quindi integrabile. Se invece $a < 0$ il punto di singolarità non è sull'intervallo di integrazione.
   Infine, all'infinito la funzione può essere maggiorata da $\dfrac{1}{x^3}$ e dunque è integrabile. Riassumendo, l'integrale esiste se e solo se $a < 0$ oppure $a = 2k\pi$.

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2-2e^{-x}+\sin(2x)}{x^a}\mathrm{d}x;$

   Verifichiamo l'integrabilità in $x = 0$ e per $x \to +\infty$.
   Nell'origine utilizziamo gli sviluppi di Taylor $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + O\left(x^3\right)$ e $\sin(2x) = 2x + O\left(x^3\right)$: otteniamo $2 - 2e^{-x} + \sin(2x) = 4x + O\left(x^2\right)$ e quindi l'andamento della funzione è lo stesso di x^{1-a}, cioè integrabile per $a < 2$.
   All'infinito invece il comportamento è quello di $\dfrac{1}{x^a}$, integrabile per $a > 1$. Concludiamo dunque che l'integrale esiste per $a \in (1, 2)$.

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(x^a)\mathrm{d}x;$

   Essendo l'integranda limitata, basterà verificare l'andamento all'infinito: se $a = 0$ abbiamo l'integrale di una costante che è banalmente divergente; se invece $a < 0$ allora $x^a \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ e $\dfrac{\sin(x^a)}{x^a} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$, dunque è integrabile se e solo se $a < -1$.
   Nel caso $a > 0$, con la sostituzione $y = x^a$ e un'integrazione per parti si ottiene

   $$\int_{1}^{+\infty} \sin(x^a)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{1}^{+\infty} y^{\frac{1}{a}-1}\sin y\mathrm{d}y.$$

   Se $a \leq 1$ quest'ultimo integrale non può essere convergente, perché altrimenti varrebbe

   $$0 = \int_{1}^{+\infty} y^{\frac{1}{a}-1}\sin y\mathrm{d}y - \int_{1}^{+\infty} y^{\frac{1}{a}-1}\sin y\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty}\int_1^{(2n+1)\pi} y^{\frac{1}{a}-1}\sin y\mathrm{d}y - \lim_{n\to+\infty}\int_1^{2n\pi} y^{\frac{1}{a}-1}\sin y\mathrm{d}y\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} y^{\frac{1}{a}-1}\sin y\mathrm{d}y\\
&\geq \lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin y\mathrm{d}y\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Infine, per $a > 1$ si può integrare per parti e ottenere

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} y^{\frac{1}{a}-1}\sin y\mathrm{d}y &= \left[-y^{\frac{1}{a}-1}\cos y\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{a}-1\right)y^{\frac{1}{a}-2}\cos y\mathrm{d}y\\
&= \cos 1 - \left(1-\frac{1}{a}\right)\int_1^{+\infty} y^{\frac{1}{a}-2}\cos y\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

con l'ultimo integrale assolutamente convegente perché $\frac{1}{a}-2 < -1$. Ricapitolando, l'integrale esiste per $a < -1$ e $a > 1$.

3. Verificare la convergenza e calcolare i seguenti integrali impropri:

   (a) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\mathrm{d}x$;

   L'integrale converge perché l'integranda è limitata e all'infinito va come $\frac{1}{x^2}$ che è integrabile.
   Per calcolarla, scomponiamo l'integranda come

$$
\frac{x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1},
$$

   abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int_2^{+\infty}\frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\log|x+1|\right]_2^{+\infty}\\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\log\frac{b-1}{b+1} - \frac{1}{2(b-1)}\right) - \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\log 4\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log 3.
\end{aligned}
$$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}}$;

   L'integrale converge perché l'unico punto in cui l'integranda è illimitata è $x = 0$, dove vale $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   Con i cambi di variabile $y = e^x$ e $z = \sqrt{y-1}$ si ottiene

$$
\int_0^{\log 2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}} = \int_1^2\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y-1}} = \int_0^1\frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z = [2\arctan z]_0^1 = \frac{\pi}{2}.
$$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x+x^2}\mathrm{d}x$;

L'integrale esiste finito perché l'integranda è illimitata solo intorno a 0, dove va come $\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$.

Con il cambio di variabile $y=\sqrt[3]{x}$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{1+y^3}\mathrm{d}y.$$

Scrivendo poi

$$\frac{1}{1+y^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - \frac{1}{6}\frac{2y-1}{y^2-y+1},$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{x+x^2}\mathrm{d}x &= 3\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\frac{1}{y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - \frac{1}{6}\frac{2y-1}{y^2-y+1}\right)\mathrm{d}y \\
&= 3\left[\frac{1}{3}\log|y+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\log\left|y^2-y+1\right|\right]_0^1 \\
&= \left(\log 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$;

L'integrale esiste perché in $x=0$ diverge come un logaritmo, che è integrabile, mentre all'infinito va come $\dfrac{\log x}{x^2}$, che è più rapido di qualsiasi potenza x^{a-2} per ogni $a>0$. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\log x}{x+2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)^2} \\
&= \lim_{a\to 0}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log b}{b+2} + \frac{\log a}{a+2} + \int_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{a\to 0}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\log a}{a+2} + \left[\frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}\log|x+2|\right]_a^b\right) \\
&= \lim_{a\to 0}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\log a}{a+2} + \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log(b+2) - \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log(a+2)\right) \\
&= \lim_{a\to 0}\left(\frac{-a}{a+2}\log a + \frac{1}{2}\log(a+2)\right) + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\log\frac{b}{b+2} \\
&= \frac{1}{2}\log 2.
\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x$;

L'integrale converge perché in 0 è limitata, in quanto $\dfrac{\arctan\left(x^2\right)}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} 1$ e va a infinito come $\dfrac{1}{x^2}$.

Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\arctan\left(x^2\right)}{x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2x}{1+x^4}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Scrivendo infine

$$\frac{1}{1+y^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty}\frac{\arctan\left(x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x \\
= \;& 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
= \;& \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\right. \\
+ \;& \left.\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right]_0^b \\
= \;& \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{b^2+\sqrt{2}b+1}{b^2-\sqrt{2}b+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}b+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}b+1\right)\right) \\
- \;& \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
= \;& \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$